27. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1987/1988

Aufgaben

27. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270831:

Während einer Kindergeburtstagsfeier spielt man "Geburtstagsdatum erraten". Katrin, das Geburtstagskind, erklärt ihrem jeweiligen Spielpartner:

> "Teile dein Geburtsdatum auf in eine Tageszahl und eine Monatszahl! (Mein heutiger Geburtstag, der 24. Mai, wäre z.B. aufzuteilen in die Tageszahl 24 und die Monatszahl 5.) Verdopple nun die Tageszahl deines Geburtsdatums, addiere zum Ergebnis 7, multipliziere die Summe mit 50 und vermehre das Produkt um die Monatszahl deines Geburtsdatums!"

Nachdem das Ergebnis genannt wurde, war Katrin in der Lage, das betreffende Geburtsdatum zu nennen. Erkläre, durch welche überlegung man das Geburtsdatum in jedem Fall aus dem Ergebnis der von Katrin geforderten Rechnung finden kann!

Aufgabe 270832:

Bei einem Schachturnier spielte jeder der acht Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie; die von den einzelnen Spielern errreichten Punktzahlen waren sämtlich voneinander verschieden. Bernd, der den zweiten Platz belegte, gewann so viele Punkte, wie die vier Letztplatzierten zusammen. Gerd wurde Dritter und Uwe belegte den siebenten Platz.

Untersuche, ob aus diesen Voraussetzungen eindeutig folgt, mit welchem Ergebnis die Partie zwischen Gerd und Uwe endete! Ist dies der Fall, dann gib das Ergebnis an!

Hinweis: Im Schachsport erhält der Spieler für einen Sieg 1 Punkt, spielt er unentschieden, bekommt er $\frac{1}{2}$ Punkt. Für eine Niederlage gibt es 0 Punkte.

Aufgabe 270833:

Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Diesem Kreis sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC einbeschrieben, bei dem für die Größen α, β der Winkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ vorausgesetzt werde, daß $\alpha > \beta$ gilt. Im Dreieck ABC sei D der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe. Der von C ausgehende Strahl durch M schneide k in E.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen der Winkel $\sphericalangle DCE$ stets die Größe $\alpha - \beta$ hat!

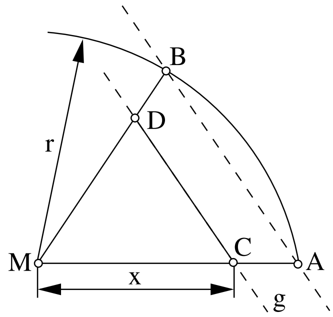
Aufgabe 270834:

Es sei $\overset{\frown}{AB}M$ ein Kreissektor, für den die Länge $r = \overline{MA} = \overline{MB}$ gegeben ist und der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$ die Größe 60° hat. Von einer Geraden g, die zu AB parallel ist und die Strecken MA bzw. MB in C bzw. D schneidet, sei bekannt, daß der Umfang u_1 des Dreiecks MCD gleich dem Umfang u_2 der Figur $\overset{\frown}{AB}DC$ ist (siehe Abbildung).

a) Ermittle unter dieser Voraussetzung die Länge $x = \overline{MC}$ in Abhängigkeit von r!

b) Die Länge r sei mit einer Genauigkeit gemessen, bei der sich auf eine Dezimale nach dem Komma genau $r = 6,7$ cm ergibt. Ferner sei zur Berechnung verwendet, daß auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau $\pi = 3,14$ gilt.

Beweise, daß man daraus die Länge x (in Zentimetern) auf eine Dezimale nach dem Komma genau durch Berechnung von Schranken ermitteln kann! Wie lautet diese Längenangabe x?



Aufgabe 270835:

Eine quadratförmige schachbrettartige Tabelle bestehe aus 15 mal 15 Feldern. Eine der beiden Diagonalen des Quadrates sei d genannt. In jedes der 225 Felder der Tabelle kann eine der Zahlen 1 bis 15 so eingetragen werden, daß die folgenden Forderungen (1) und (2) erfüllt sind:

(1) Jede (waagerechte) Zeile enthält jede der 15 Zahlen genau einmal.

(2) Für je zwei Felder, die symmetrisch zu d liegen, gilt: Die Zahlen in diesen Feldern sind einander gleich.

Für jede Eintragung kann man die Summe aus denjenigen Zahlen bilden, die in den 15 von der Diagonale d durchquerten Feldern stehen.

Beweise, daß diese Summe durch die Voraussetzungen (1) und (2) eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Summe!

Aufgabe 270836:

Es sei $ABCDS$ eine gerade Pyramide mit einem Quadrat $ABCD$ als Grundfläche und S als Spitze. Der Fußpunkt der Höhe dieser Pyramide sei E, ferner sei $a = \overline{AB}$ und $h = \overline{ES}$.

I. Zeichne ein Bild dieser Pyramide mit den Maßen $a = 6$ cm, $h = 8$ cm in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$), wobei die Strecke ES in wahrer Länge erscheinen soll!

II. Auf der Strecke ES gibt es genau einen Punkt P, für den die (im Raum verlaufenden) Strecken AP und SP einander gleichlang sind.

Leite eine Möglichkeit her, in dem nach I. hergestellten Bild der Pyramide $ABCDS$ den Bildpunkt dieses Punktes P zu konstruieren; beschreibe diese Konstruktion und führe sie durch!

III. Die Länge a sei beliebig gegeben. Ermittle diejenigen Werte h, für die sich (in der Pyramide mit diesen Maßen a, h) ein Punkt P auf ES finden läßt, der die in II. genannte Bedingung $\overline{AP} = \overline{SP}$ erfüllt!