



27. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Saison 1987/1988

Aufgaben





27. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 270811:

Steffen stellt den Mitgliedern der AG Mathematik folgende Aufgabe:

”Jeder denke sich eine Zahl, multipliziere diese mit 2, addiere zum Produkt 30, dividiere die Summe durch 2, subtrahiere von dem erhaltenen Ergebnis die anfangs gedachte Zahl!

Schreibe des Ergebnis auf!”

Es stellte sich heraus, daß alle Schüler der Arbeitsgemeinschaft das gleiche Ergebnis hatten. Müssen sich Steffens Mitschüler unbedingt auch die gleiche Zahl gedacht haben?

Aufgabe 270812:

In einen rechtwinkligen Koordinatensystem seien die Punkte $A(1;5)$, $B(4;4)$, $C(2;8)$, $A'(8;4)$, $B'(7;1)$, $C'(11;3)$ gegeben. Sie sind so gelegen, daß es eine Drehung gibt, bei der A , B und C die Bildpunkte A' , B' bzw. C' haben.

Konstruiere das Drehzentrum D dieser Drehung! Beschreibe deine Konstruktion!

Beweise folgende Aussage: Wenn D das gesuchte Drehzentrum ist, dann läßt sich D nach deiner Beschreibung konstruieren.

Aufgabe 270813:

Es sei ABC ein Dreieck, bei dem der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ die Größe 30° hat.

Beweise, daß unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich der Länge des Umkreisradius dieses Dreiecks ist!

Aufgabe 270814:

Es soll die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen gebildet werden. Dann ist eine ”Division mit Rest” durchzuführen, und zwar soll die oben genannte Summe durch 4 dividiert werden. Man will nun untersuchen, welche Zahlen bei einer derartigen Division als Rest auftreten können und welche nicht.

- Bilde zunächst einige Beispiele, indem du jedesmal selbst zwei natürliche Zahlen wählst, die Summe ihrer Quadrate durch 4 dividierst und den auftretenden Rest notierst! Setze das Bilden solcher Beispiele so oft fort, bis es nur noch eine natürliche Zahl kleiner als 4 gibt, die in deinen Beispielen nicht als Rest auftrat!
- Nun kann man vermuten, daß diese Zahl niemals als Rest auftritt, wenn die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen durch 4 dividiert wird.

Beweise diese Vermutung!