26. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1986/1987

Aufgaben

26. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 261231:

Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + y - z = 1 \qquad (1)$$
$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 \qquad (2)$$
$$-x^3 + y^3 + z^3 = -1 \qquad (3)$$

Aufgabe 261232:

Im Raum seien zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 gegeben. Ferner seien d_1 und d_2 zwei gegebene Streckenlängen.

Beweisen Sie folgende Aussage:

Wie man auch auf g_1 Punkte P_1, P_2 mit $\overline{P_1P_2} = d_1$ und auf g_2 Punkte Q_1, Q_2 mit $\overline{Q_1Q_2} = d_2$ wählt, stets ergibt sich für das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten P_1, P_2, Q_1, Q_2 ein und derselbe Wert.

Aufgabe 261233A:

Man untersuche ob es vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die die folgende Eigenschaft haben:

Jede der vier Zahlen läßt sich so in zwei positive ganzzahlige Summanden x und y zerlegen, daß sie jeweils ein Teiler von $x \cdot y$ ist.

Aufgabe 261233B:

Man beweise, daß in jedem Dreieck ABC für die Seitenlänge $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, die Größen α, β, γ der Innenwinkel $\sphericalangle CAB$; $\sphericalangle ABC$; $\sphericalangle BCA$ sowie für den Inkreisradius ρ und den Flächeninhalt F die Ungleichung

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} \geq \frac{27\rho}{8F} \quad \text{gilt.} \qquad (1)$$

Man gebe alle diejenigen Dreiecke an, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 261234:

Beweisen Sie: Für jedes Sehnenviereck $ABCD$, dessen Diagonale BD durch den Mittelpunkt N der Diagonalen AC verläuft, gilt die folgende Gleichung (1).

$$2 \cdot \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2. \qquad (1)$$

Aufgabe 261235:

Zwei Personen, A und B, spielen mit n in einer Geraden angebrachten Lampen ($n > 3$) das folgende Spiel:

Zum Spielbeginn sind alle Lampen ausgeschaltet. Eine ganze Zahl k mit $1 < k < n-1$ wird vereinbart. Dann verläuft das Spiel so, daß die Spieler, mit A beginnend, abwechselnd am Zuge sind:

Jeder Spieler schaltet, wenn er am Zug ist, nach eigener Wahl eine Anzahl nebeneinanderliegender Lampen ein, mindestens eine und höchstens k. Gewonnen hat derjenige Spieler, der die letzte der n Lampen einschaltet.

Man beweise, daß Spieler A für jedes $n > 3$ und jedes k mit $1 < k < n-1$ durch eine geeignete Vorgehensweise (Strategie) den Gewinn erzwingen kann.

Aufgabe 261236:

Es sei (x_n) diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$x_1 = \sqrt{3} \qquad \text{und} \tag{1}$$
$$x_{n+1} = \sqrt{9x_n^2 + 11x_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

gilt. Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ sei ferner (y_n) die durch

$$y_n = \frac{x_n}{a^n} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{4}$$

definierte Zahlenfolge.

Man ermittle alle diejenigen $a \neq 0$, für die die Folge (y_n) konvergent ist.