25. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1985/1986

Aufgaben

25. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 251241:

Zu einer Feier erscheinen fünf Gäste. Der Gastgeber stellt fest, daß unter je drei von diesen Gästen stets zwei sind, die sich wechselseitig kennen, und zwei, die sich nicht kennen.

Man beweise, daß der Gastgeber seine fünf Gäste so an einen runden Tisch setzen kann, daß an beiden Seiten jedes Gastes Bekannte dieses Gastes sitzen.

Aufgabe 251242:

Es seien q_1, q_2, ..., q_n ($n \geq 2$) paarweise verschiedene Primzahlen. Man beweise, daß aus dieser Voraussetzung stets

$$\frac{q_1^3+1}{q_1^3-1} \cdot \frac{q_2^3+1}{q_2^3-1} \cdot \ldots \cdot \frac{q_n^3+1}{q_n^3-1} < \frac{36}{25} \quad \text{folgt.}$$

Aufgabe 251243:

Gibt es eine Funktion f, die für alle reellen Zahlen definiert ist, reelle Funktionswerte hat und die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt?

(1) Für alle reellen Zahlen x und y gilt $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$.

(2) Es gilt $f(1) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 251244:

Es sei $A_1A_2A_3A_4$ ein Tetraeder mit gegebenen Kantenlängen $\overline{A_1A_2} = a$, $\overline{A_1A_3} = b$, $\overline{A_1A_4} = c$, $\overline{A_2A_3} = d$, $\overline{A_2A_4} = e$, $\overline{A_3A_4} = f$.

Man untersuche, ob es einen Punkt P im Raum gibt, so daß die Summe s der Quadrate des Abstandes des Punktes P von den Eckpunkten des Tetraeders einen kleinsten Wert annimmt. Falls das zutrifft, ermittle man jeweils zu gegebenen a, b, c, d, e, f diesen kleinsten Wert von s.

Aufgabe 251245:

Es sei (p_n) die Folge der ihrer Größe nach geordneten Primzahlen, d.h., es sei

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7, \quad \ldots$$

Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl N derart gibt, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n > N$ die Ungleichung $p_n > 4n$ gilt.

Aufgabe 251246A:

Eine im dekadischen Positionssystem dargestellte natürliche Zahl sei *Spiegelzahl* genannt, wenn ihre Ziffern symmetrisch aufgebaut sind, d.h., wenn die erste und die letzte, die zweite und die vorletzte usw. Ziffer übereinstimmt.

Zum Beispiel sind die Zahlen 358 853, 27 672, 44 444 Spiegelzahlen.

Man untersuche, ob es zu jeder zweistelligen natürlichen Zahl a, deren letzte Ziffer von 0 verschieden ist, eine von 0 verschiedene Spiegelzahl gibt, die durch a teilbar ist.

Aufgabe 251246B:

Für jedes Dreieck ABC bezeichne d die Länge des Inkreisdurchmessers, g die größte Seitenlänge und ε die Größe des kleinsten Winkels des Dreiecks ABC.

a) Man beweise: Es gibt eine Konstante K, so daß für jedes Dreieck ABC die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{1}{d} < \frac{K}{g \sin \varepsilon} \tag{1}$$

b) Unter allen Konstanten K, für die die in a) zu beweisende Aussage gilt, ermittle man die kleinste Konstante, falls diese existiert.