25. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1985/1986

Aufgaben

25. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 251221:

Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

$$x^2 + y^2 = 5, \tag{1}$$
$$x^2 + xy = 2. \tag{2}$$

Aufgabe 251222:

Beweisen Sie, daß in jedem Dreieck ABC für die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ und die Länge s_a der Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt A und dem Mittelpunkt M der Strecke BC die Beziehung

$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 251223:

a) Es seien (a_n) und (b_n) die durch $a_n = 3n - 2$, $b_n = a_n^2$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierten Zahlenfolgen.

   Beweisen Sie, daß dann die Folge der Differenzen $b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine arithmetische Zahlenfolge ist!

b) Eine Verallgemeinerung der in a) zu beweisenden Aussage lautet:

   Wenn (a_n) eine beliebige arithmetische Folge und (b_n) die durch $b_n = a_n^2$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierte Folge ist, dann ist die Folge der Differenzen $b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ ebenfalls eine arithmetische Folge.

   Beweisen Sie auch diese Verallgemeinerung!

Aufgabe 251224:

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, die die folgende Eigenschaft haben:

Im abgeschlossenen Intervall $\langle 2^n, 2^{n+1} \rangle$ befindet sich mindestens eine durch n^3 teilbare natürliche Zahl.