25. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1985/1986

Aufgaben

25. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 251211:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

$$x^2 + y = 1, \quad (1)$$
$$x + y^2 = 1. \quad (2)$$

Aufgabe 251212:
Einem Kreis k mit dem Radius $r = 1\,985$ mm sei ein gleichseitiges Dreieck ABC einbeschrieben. Ferner schneide eine durch C verlaufende Gerade s die Gerade g durch A und B in einem Punkt G und den Kreis k in einem weiteren von C verschiedenen Punkt K.

Man beweise, daß bei jeder Wahl der Geraden s unter den genannten Voraussetzungen das Produkt $\overline{CG} \cdot \overline{CK}$ denselben Wert hat, und berechne diesen Wert.

Aufgabe 251213:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die folgende Eigenschaften haben:

(1) n läßt bei der Division durch 3 den Rest 1,

(2) n^2 läßt bei der Division durch 11 den Rest 1,

(3) es gilt: $100 < n < 200$.

Aufgabe 251214:
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

Zu Beginn geben sie sich (z.B. durch ein Zufallsverfahren) eine natürliche Zahl K ($K \geq 17$) vor. Sodann wählt A aus der Menge $M = \{2, 4, 8, 16\}$ eine Zahl aus; sie sei mit a_1 bezeichnet. Darauf multipliziert B die Zahl a_1 mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl b_1. Danach multipliziert A die Zahl b_1 erneut mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl a_2. Anschließend setzen B und A diesen Prozeß abwechselnd fort, bis einer der Spieler ein Produkt erreicht hat, das größer als die vorher festgelegte Zahl K ist. Gewonnen hat derjenige Spieler, der als erster ein Produkt erreicht, das größer als K ist.

a) Wie muß Spieler A spielen, um mit Sicherheit zu gewinnen, wenn $K = 100$ vorgegeben ist?

b) Welcher der beiden Spieler kann den Gewinn stets erzwingen, und welche Gewinnstrategie muß er anwenden, wenn $K = 1\,000\,000$ vorgegeben ist?

c) Wie kann man bei beliebig vorgegebenem K entscheiden, welcher der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, und wie muß dieser Spieler vorgehen?