25. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1985/1986

Aufgaben

25. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250931:

a) Beweisen Sie, daß es eine natürliche Zahl N gibt, für die folgende Aussage (1) gilt!

(1) Für jede natürliche Zahl n für die $n \geq N$ ist, kann eine Quadratfläche F in genau n Teilquadrate $T_1, ..., T_n$ zerlegt werden. (Dabei sollen die Flächen $T_1, ..., T_n$ die Fläche F vollständig ausfüllen; sie brauchen nicht untereinander kongruent sein.)

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N, für die die Aussage (1) gilt!

Aufgabe 250932:

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (a, b) von zweistelligen Zahlen a und b, für die folgendes gilt:

Bildet man durch Hintereinanderschreiben von a und b in dieser Reihenfolge eine vierstellige Zahl z, so ist

$$z = (a + b)^2.$$

Aufgabe 250933:

Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders sei V_T, das Volumen seiner Umkugel sei V_K.

Berechnen Sie das Verhältnis $V_K : V_T$ und runden Sie es ganzzahlig (d.h. ermitteln Sie die zu $V_K : V_T$ nächstgelegene ganze Zahl)! Dabei können die (auf eine bzw. zwei Dezimalen nach dem Komma genauen) Näherungswerte $\sqrt{3} \approx 1,7$ und $\pi \approx 3,14$ verwendet werden.

Aufgabe 250934:

Die acht Zahlen 1, 2, ..., 8 sollen so auf die Eckpunkte eines Würfels verteilt werden, daß dabei folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedem Eckpunkt des Würfels wird genau eine der acht Zahlen zugeteilt, jede dieser Zahlen soll in der Verteilung vorkommen.

(2) Addiert man auf jeder Seitenfläche des Würfels die vier Zahlen an den Eckpunkten dieser Seitenfläche, so ergibt sich auf allen sechs Seitenflächen dieselbe Summe.

Es sollen möglichst viele Verteilungen der acht Zahlen auf die Eckpunkte so zusammengestellt werden, daß jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1), (2) erfüllt und daß keine zwei dieser Verteilungen zueinander kongruent sind, d.h. durch Drehung oder Spieglung ineinander übergeführt werden können.

Ermitteln Sie die Anzahl der Verteilungen, die in einer solchen Zusammenstellung auftreten!

Aufgabe 250935:
In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ABC sei A' der Fußpunkt der durch A gehenden Höhe, B' der Fußpunkt der durch B gehenden Höhe und S der Schnittpunkt dieser beiden Höhen.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AS} : \overline{SB'}$ gilt!

Aufgabe 250936:

a) Ist durch den Term

$$z = \sqrt{192 + 96 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{192 - 96 \cdot \sqrt{3}}$$

eine Zahl definiert?

b) Wenn dies der Fall ist, ist z rational?