# 25. Mathematik Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 8
# Saison 1985/1986

Aufgaben

# 25. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 8
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250831:

Beweise folgenden Satz:

Es gibt keine Quadratzahl, die bei der Division durch 3 den Rest 2 läßt.

Aufgabe 250832:

Brigade Schulz spielt im "Tele-Lotto (5aus 35)" nach einem sogenannten "vollmathematischen System mit $n$ Zahlen". Darunter versteht man, wenn $n$ eine natürliche Zahl mit $5 < n \leq 35$ ist, folgendes System:

Es werden von der Brigade genau $n$ Zahlen 1, 2, ... , 35 ausgewählt, und dann werden in der Menge dieser $n$ Zahlen alle verschiedenen Teilmengen aus je fünf Elementen ermittelt. Jede dieser Teilmengen wird als Tip abgegeben.

a) Die Brigade spielt nach einem "vollmathematischen System mit 6 Zahlen". Bei der nachfolgenden Ziehung im Tele-Lotto stellt sich heraus, das genau vier der fünf Gewinnzahlen unter den sechs von der Brigade in ihrem System verwendeten Zahlen vorkommen.

Ferner werden nach dieser Ziehung folgende Gewinnquoten bekanntgegeben: Für jeden Tip mit genau drei richtig getippten Zahlen gibt es 20 M, für jeden Tip mit genau vier richtig getippten Zahlen gibt es 400 M, für jeden Tip mit fünf richtig getippten Zahlen 3 000 M.

Ermittle den hiermit zustandekommenden Gewinn der Brigade!

b) Die Brigade spielt nach einem "vollmathematischen System mit 7 Zahlen". Bei einer Ziehung wird festgestellt: Genau vier der fünf Gewinnzahlen kommen unter den sieben von der Brigade verwendeten Zahlen vor. Die Gewinnquoten sind dieselben wie in a).

Ermittle ebenfalls den Gewinn der Brigade!

*Hinweis:* Die Kosten, d.h. der Spieleinsatz, sollen in beiden Aufgaben nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 250833:

Es sei $g$ eine gegebene Gerade. Ferner seien zwei Punkte $A$ und $B$ gegeben, die beide nicht auf $g$ liegen, deren Verbindungsstrecke $AB$ aber $g$ schneidet und nicht auf $g$ senkrecht steht.

Für einen Streckenzug $APQB$ seien folgende Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

(1) Die Punkte $P$ und $Q$ liegen auf $g$.

(2) Die Gerade durch $A$ und $P$ ist parallel zur Geraden durch $B$ und $Q$.

(3) Die Strecke $PQ$ hat die Länge $t = 6$ cm.

a) Beweise, daß jeder Streckenzug $APQB$, der die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, durch eine Konstruktion (aus gegebenen $g$, $A$, $B$ und der gegebenen Länge $t = 6$ cm) erhalten werden kann!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, daß jeder Streckenzug $APQB$, der nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

d) Wähle selbst eine Gerade $g$ und Punkte $A$, $B$, wie oben beschrieben, und konstruiere dazu *alle* diejenigen Streckenzüge $APQB$, die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen! (Ein Beweis, daß *alle* verlangten Streckenzüge konstruiert wurden, wird nicht gefordert.)

Aufgabe 250834:

Es sei $k$ ein Kreis, sein Mittelpunkt sei $M$. Eine Sehne von $k$, die nicht Durchmesser ist, sei $AB$. Ferner sei $t$ die in $A$ an $k$ gelegte Tangente, und $C$ sei der Fußpunkt des von $B$ auf $t$ gefällten Lotes.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Gerade durch $A$ und $B$ stets den Winkel $\sphericalangle CBM$ halbiert!

Aufgabe 250835:

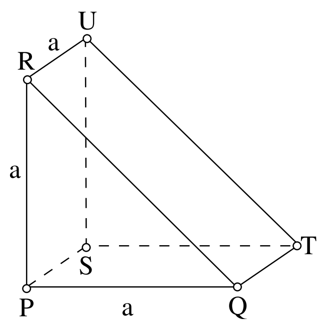
Von Lew Nikolajewitsch Tolstoi (1828 - 1910), einem bedeutenden russischen Schriftsteller, stammt folgende Aufgabe:

> Schnitter sollen zwei Wiesen mähen. Am Morgen begannen alle, die größere Wiese zu mähen. Vom Mittag dieses Tages an teilten sie jedoch die Arbeit anders ein: Die Hälfte der Schnitter verblieb beim Mähen der ersten Wiese, die sie bis zum Abend fertig mähen. Die anderen Schnitter gingen zum Mähen der zweiten Wiese über, deren Flächeninhalt gleich dem der Hälfte der ersten war, und arbeiteten bis zum Abend. Nun blieb auf der zweiten Wiese ein Rest, für den ein Schnitter allein einen ganzen Tag benötigte.
>
> Wieviel Schnitter waren am ersten Tag bei der Arbeit?

*Anmerkung:* Es sei vorausgesetzt, daß jeder Schnitter an jedem Vormittag eine gleichgroße Fläche wie an jedem Nachmittag mäht und daß diese Arbeitsleistung aller Schnitter die gleiche ist.

Aufgabe 250836:

Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck $PQR$ ist (siehe Abbildung). Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kantenlänge $a$ des Dreiecks $PQR$.




Gesucht ist eine Ebene $E$, die parallel zu einer der quadratischen Seitenflächen $F$ des Prismas verläuft und die das Prisma in zwei Körper zerlegt, deren Volumina sich in irgendeiner Reihenfolge wie $9 : 16$ verhalten.

Ermittle zu gegebenen $a$ alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche $F$ und einer solchen Ebene $E$ betragen kann!