25. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1985/1986

Aufgaben

25. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250731:
Ermittle zu jeder natürlichen Zahl $n > 0$ die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die Teiler der Zahl 2^n sind!

Aufgabe 250732:
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels und mit $\overline{CA} = 4\,\text{cm}$, $\overline{CB} = 20\,\text{cm}$. Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, daß sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:

a) Die Strecke CB kann um x cm verkürzt werden; d.h. zwischen C und B liegt ein Punkt B' mit $\overline{CB'} = \overline{CB} - x$ cm.

b) Wenn zugleich die Strecke CA über A hinaus um x cm bis zu einem Punkt A' verlängert wird, dann beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C$ genau 55% des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

Untersuche, ob es genau eine natürliche Zahl x gibt, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

Aufgabe 250733:
Für ein Viereck $ABCD$ werden die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

(1) $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

(2) Die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt E, der auf der Geraden durch C und D liegt.

(3) Es gilt $\overline{AE} = 6,0\,\text{cm}$ und $\overline{BE} = 4,0\,\text{cm}$.

a) Beweise, daß jedes Viereck $ABCD$, das diese Bedingungen erfüllt, aus den gegebenen Längen $6,0\,\text{cm}$ und $4,0\,\text{cm}$ konstruiert werden kann!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, daß jedes Viereck $ABCD$, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

Aufgabe 250734:
Ein Jagdflugzeug flog in einer halben Stunde 200 km weiter als ein Sportflugzeug in einer Stunde.

Wie groß war die Geschwindigkeit jedes dieser beiden Flugzeuge, wenn die des Jagdflugzeuges dreimal so groß war wie die des Sportflugzeugs?

Aufgabe 250735:

In einer Arbeitsgemeinschaft stellt Rainer seinen Klassenkameraden folgendermaßen eine Aufgabe:

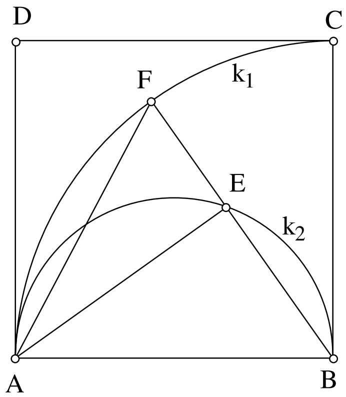
Er nimmt drei Karten, auf denen zweiziffrige Zahlen stehen, so in die Hand, daß niemand anders als er die Zahlen sehen kann und daß sich die dreimal zwei Ziffern nebeneinandergehalten als eine sechsstellige Zahl lesen lassen. Dies macht er (mit denselben Karten) mehrere Male, bis er jede mögliche Reihenfolge der drei Karten genau einmal berücksichtigt hat. Die abgelesene sechsstellige Zahl notiert er jedesmal (ebenfalls so, daß nur er seine Notizen sehen kann). Anschließend bildet er die Summe aller notierten Zahlen.

Nun teilt er den Klassenkameraden mit:

"Auf einer Karte steht die Zahl 15, auf einer die Zahl 23. Auf der dritten Karte steht eine zweistellige Zahl, die ich nicht verrate. Die Summe aller notierten Zahlen beträgt 1 373 736."

Untersuche, ob es genau eine zweistellige Zahl gibt, die unter den genannten Bedingungen nach Rainers Aussagen auf der dritten Karte stehen kann! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese zweistellige Zahl!

Aufgabe 250736:



Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Der im Innern von $ABCD$ gelegene Viertelkreisbogen um B mit dem Radius $\overline{AB}$ sei k_1, der im Innern von $ABCD$ gelegene Halbkreis mit AB als Durchmesser sei k_2. Ein von B ausgehender Strahl schneide k_2 in einem Punkt E und k_1 in einem Punkt F.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{\sphericalangle DAF} = \overline{\sphericalangle EAF}$ folgt!