24. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1984/1985

Aufgaben

24. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 241241:

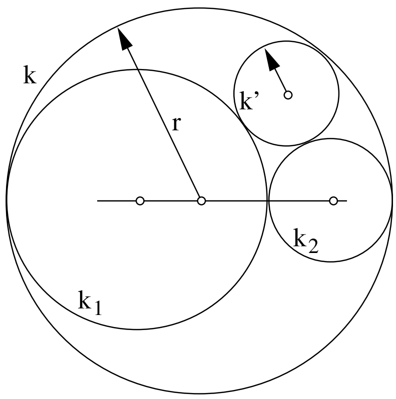
a) Man beweise, daß durch

$$f(x) = \frac{(x^2-x)\cdot(x^2-x+5)+6}{(x^2-x)\cdot(x^2-x+6)+9}$$

eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert wird.

b) Man ermittle den Wertebereich dieser Funktion.

Aufgabe 241242:



Über vier Kreise k, k_1, k_2, k' wird folgendes vorausgesetzt:

Die Kreise k_1 und k_2 berühren einander von außen; die Mittelpunkte von k_1, k_2 und k liegen auf einer gemeinsamen Geraden; die Kreise k_1 und k_2 berühren den Kreis k von innen; der Kreis k' berührt die Kreise k_1 und k_2 von außen und den Kreis k von innen.

Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen gilt für die Radien r, r' von k bzw. k' stets $r' \leq \frac{r}{3}$.

Aufgabe 241243:

Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ definiert sind und den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

(1) Für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) = x \cdot f(x)$.

(2) Für alle reellen Zahlen x und y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $x + y \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) + f(\frac{1}{y}) = 1 + f(\frac{1}{x+y})$.

(3) Es gilt $f(1) = 2$.

Aufgabe 241244:

Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$. Man beweise, daß das Gleichungssystem

$$\sqrt{y-a}+\sqrt{z-a} = 1 \qquad (1)$$
$$\sqrt{z-b}+\sqrt{x-b} = 1 \qquad (2)$$
$$\sqrt{x-c}+\sqrt{y-c} = 1 \qquad (3)$$

genau eine Lösung (x, y, z) hat, wobei x, y, z reelle Zahlen sind.

Aufgabe 241245:
Es ist zu beweisen:

Wenn die Längen der Kanten eines Tetraeders $ABCD$ nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann sind die Innenwinkel zwischen je zwei Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ nicht größer als 90°.

Aufgabe 241246A:
Man untersuche, ob es 40 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die sämtliche kleiner als 10^9 und nicht Primzahlen sind.

Aufgabe 241246B:
Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für welche die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{k\,(x_n^2 + x_n)} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

definierte Zahlenfolge (x_n) konvergent ist. Zu jeder solchen Zahl k ermittle man den Grenzwert der Zahlenfolge (x_n).