24. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1984/1985

Aufgaben

24. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 241231:

Man ermittle die ersten sechs Glieder a_1, a_2, ..., a_6 von allen denjenigen Folgen (a_n) reeller Zahlen, die die nachstehenden Eigenschaften (1) bis (5) haben:

(1) Es gilt $a_1 = -\frac{1}{5}$.

(2) Es gilt $a_5 = 3$.

(3) a_1, a_2, a_3, a_4 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge.

(4) a_4, a_5, a_6 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer geometrischen Zahlenfolge.

(5) Die Summe der ersten sechs Glieder der Folge (a_n) beträgt $\frac{13}{2}$.

Aufgabe 241232:

Man beweise: Wenn die Seitenlängen eines Dreiecks ABC nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann gilt:

a) ABC ist ein spitzwinkliges Dreieck.

b) Die Längen der Höhen des Dreiecks ABC sind nicht kleiner als $\sqrt{2}$.

Aufgabe 241233A:

Man ermittle alle Funktionen f mit den folgenden Eigenschaften:

(1) f ist für alle rationalen Zahlen definiert.

(2) Es gilt $f(1) = 1$.

(3) Für alle rationalen Zahlen x und y gilt $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$.

Aufgabe 241233B:

Man ermittle zu jeder geraden natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot ... \cdot (x+n-1) = (x+n) \cdot (x+n+1) \cdot (x+n+2) \cdot ... \cdot (x+2n-1).$$

Aufgabe 241234:

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen z mit $1 \leq z \leq 5$, die die Bedingung erfüllen, daß die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x + z$ und die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ mindestens einen Schnittpunkt mit ganzzahliger Abszisse haben.

Zu jeder Zahl z, die diese Bedingung erfüllt, gebe man - für die betreffende Gerade und die Parabel - die Koordinaten aller Schnittpunkte mit ganzzahliger Abszisse an.

Aufgabe 241235:

Man ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, c) positiver natürlicher Zahlen, für die $a^b + b^c = abc$ gilt.

Aufgabe 241236:

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die

$$99^n + 101^n > \frac{51}{25} \cdot 100^n \quad \text{gilt.} \tag{1}$$