23. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1983/1984

Aufgaben

23. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 231241:

Es sei (x_n) diejenige Folge von reellen Zahlen, für die $x_1 = 1$ und

$$x_{n+1} = \frac{4x_n^2+1}{5x_n+1} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \quad \text{gilt.}$$

Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls das zutrifft, ihren Grenzwert.

Aufgabe 231242:

a) Man beweise, daß es eine Menge M mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3), (4) gibt:

   (1) Jedes Element von M ist eine natürliche Zahl.

   (2) Das kleinste Element von M ist die Zahl 1.

   (3) Das größte Element von M ist die Zahl 100.

   (4) Jedes Element von M mit Ausnahme der Zahl 1 ist die Summe von zwei Elementen von M oder das Doppelte eines Elementes von M.

b) Man ermittle eine Menge M, die die Bedingungen (1), (2), (3), (4) erfüllt und dabei möglichst wenig Elemente hat. Daß die ermittelte Menge M diesen Anforderungen genügt, ist zu beweisen.

Aufgabe 231243:

Vier Mathematiker T, D, S, P einigen sich auf ein Ratespiel nach folgenden Regeln:

T denkt sich ein Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen mit $1 \leq x \leq y \leq z$ und $x + y + z \leq 10$. Dann soll er D die Zahl $d = y - x$, S die Zahl $s = x + y + z$ und P die Zahl $p = xyz$ mitteilen, jeweils so, daß die beiden anderen den Wert der mitgeteilten Zahl nicht erfahren. Danach sollen sich D, S und P über ihre Informationen unterhalten.

Untersuchen Sie, ob es ein Tripel (x, y, z) gibt, mit dem bei einer Durchführung dieses Spiels (nach Mitteilung von d, s und p) das folgende Gespräch stattfinden kann:

P: "Ich kann das Tripel (x, y, z) nicht eindeutig ermitteln."

S: "Das wußte ich schon, bevor Sie es ausgesprochen haben."

P: "Jetzt kann ich das Tripel ermitteln."

D: "Ich auch."

S: "Ich jetzt auch."

Wenn es ein solches Tripel gibt, stellen Sie fest, ob es durch dieses Gespräch eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, so geben Sie dieses Tripel an!

Aufgabe 231244:

Seien P_1, P_2, ..., P_n verschiedene Punkte in der Ebene, $n \geq 2$. Man beweise:

$$\max_{ij} \overline{P_iP_j} > \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{n}-1\right) \cdot \min_{ij} \overline{P_iP_j}. \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

Aufgabe 231245:

Man ermittle alle Funktionen f, die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $f(\frac{1}{x_1+x_2} = f(\frac{1}{x_1} + f(\frac{1}{x_2}$.

(2) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $(x_1 + x_2) \cdot f(x_1 + x_2) = x_1x_2 \cdot f(x_1) \cdot f(x_2)$.

(3) Es gilt $f(1) = 1$.

Aufgabe 231246A:

Über n Punkte des Raumes, von denen keine vier in einer gemeinsamen Ebene liegen, wird vorausgesetzt, daß jedes Tetraeder, das vier dieser n Punkte als Ecken hat, einen Rauminhalt nicht größer als 1 besitzt.

Man beweise aus dieser Voraussetzung, daß es dann im Raum ein Tetraeder mit einem Rauminhalt nicht größer als 27 gibt, das alle n Punkte in seinem Inneren oder auf seinem Rand enthält.

Anmerkung: In dieser Aufgabe wurde (bei der Angabe von Rauminhalten) einfachheitshalber auf die Angabe von Maßeinheiten verzichtet. In der Lösungsangabe verfahre man ebenso.

Aufgabe 231246B:

Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ und k natürliche a_1, a_2, ..., a_k, die nicht notwendig paarweise verschieden sind, gibt, so daß

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = 1\,984 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1 \qquad \text{gilt.}$$

Falls das zutrifft, gebe man solche natürlichen Zahlen a_1, a_2, ..., a_k an.