23. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1983/1984

Aufgaben

23. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 231231:

In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Seite AB. Eine Gerade durch M verlaufe so, daß sie AC in einem Punkt D und die Verlängerung von BC über C hinaus in einem Punkt E schneidet und daß dabei die Dreiecke AMD und CED den gleichen Flächeninhalt haben.

Beweisen Sie, daß durch diese Voraussetzung das Verhältnis $\overline{AD} : \overline{DC}$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie dieses Verhältnis!

Aufgabe 231232:

Die Kantenlängen eines beliebigen Quaders seien a, b, c und die Länge seiner Raumdiagonale sei d.

Man beweise, daß dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 \geq abcd \cdot \sqrt{3}. \tag{1}$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Quader, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 231233A:

Man untersuche, ob es eine Folge $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

a) von positiven rationalen Zahlen a_i,

b) von positiven ganzen Zahlen a_i

mit folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt:

(1) Nicht alle Glieder der Folge sind einander gleich.

(2) Für alle $n \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right);$$

d.h. a_n ist das harmonische Mittel von a_{n-1} und a_{n+1}.

Falls eine solche Folge im Falle a) bzw. im Falle b) existiert, so sind ihre Glieder anzugeben. Falls sie nicht existiert, so ist das zu beweisen.

Aufgabe 231233B:

Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

20 Karten, von denen jede mit genau einer der Zahlen 1, 2, 3, ..., 20 beschriftet ist (wobei jede dieser Zahlen vorkommt), liegen aufgedeckt, so daß die Zahlen zu sehen sind, auf dem Tisch. Von diesen Karten hat A in

Gedanken zwei ausgewählt, ohne daß B weiß, um welche Karten es sich handelt.

B versucht nun, diese beiden Karten wie folgt zu ermitteln: Als ersten *Zug* nimmt B zwei beliebig von ihm ausgewählte Karten, und A sagt ihm, wie viele von diesen beiden Karten richtig sind (0, 1 oder 2 Karten). Dann legt B diese Karten wieder aufgedeckt zurück.

Waren es noch nicht die beiden richtigen Karten, so nimmt B beim zweiten *Zug* wieder zwei beliebig von ihm gewählte Karten, und A sagt ihm, wieviele davon richtig sind; B legt dann diese Karten wieder zurück. Dieses Verfahren wird so lange mit dem 3., 4., ... Zug fortgesetzt, bis B in einem dieser Züge die beiden richtigen Karten genommen hat. B hat gewonnen, wenn er spätestens mit dem 12. Zug die beiden richtigen Karten nimmt.

Bei einer Durchführung dieses Spieles beginnt B das Spiel mit der folgenden Strategie: Er nimmt

im 1. Zug die Karten 1, 2 und, falls dies noch nicht die beiden richtigen Karten sind,

im 2. Zug die Karten 3, 4 sowie, in entsprechender Weise fortgesetzt,

falls in keinem der bisherigen Züge die beiden richtigen Karten (gleichzeitig in ein und demselben Zug) vorkamen, im 9. Zug die Karten (17, 18).

a) Man gebe zu dieser von B begonnenen Strategie eine Fortsetzungsstrategie für die weiteren Züge an, mit deren Hilfe B den Gewinn erzwingen kann.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß B bei der angegebenen Strategie sogar spätestens mit dem 11. Zug die beiden richtigen Karten nimmt?

Aufgabe 231234:

Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $0 \leq x < 2\pi$ und $0 \leq y < 2\pi$, die das Gleichungssystem

$$3 \cdot \sin x \cdot \cos y = \cos x \cdot \sin y \qquad (1)$$
$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 \qquad (2)$$

erfüllen.

Aufgabe 231235:

Man ermittle alle Paare $(a; b)$ von Primzahlen a und b für die $3a^2 + a = b^2 + b$ gilt.

Aufgabe 231236:

Es sei $\sphericalangle P_0SQ$ ein Winkel von beliebig, aber fest vorgegebener Größe $\alpha < 180°$. Ein vom Punkt P_0 ausgehender, ins Innere des Winkels gerichteter Lichtstrahl werde jedesmal, wenn er auf einen der Schenkel des Winkels trifft, nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen. Die Punkte, in denen der Lichtstrahl dabei auf die Schenkel des Winkels trifft, seien fortlaufend mit P_1, P_2, P_3, ... bezeichnet (soweit solche Punkte existieren). Die Größe des Winkels, den zu Beginn der von P_0 ausgehende Lichtstrahl mit der von P_0 nach S führenden Halbgeraden bildet, sei φ_0 genannt ($0° < \varphi_0 < 180°$).

Beim Experimentieren mit derartigen Winkelspiegeln kann man fragen, ob es zu gegebenem φ_0 endlich oder unendlich viele Punkte P_1, P_2, P_3, ... gibt, ob es zu jedem φ_0 unter den Punkten P_1, P_2, P_3, ... einen Punkt P_k derart gibt, daß $\overline{SP_k} \leq \overline{SP_i}$ für alle $i = 1, 2, 3, ...$ gilt und durch wieviele Möglichkeiten ... der Richtungswahl φ_0 es (je nach der Vorgabe von α) erreichbar ist, daß der Lichtstrahl eine auf seinem Weg dem Punkt S nächstgelegene Teilstrecke $P_{m-1}P_m$ mit der Eigenschaft $\overline{SP_{m-1}} = \overline{SP_m}$ durchläuft, so daß also das Wegstück $P_0...P_{m-1}$ symmetrisch liegt zum Wegstück $P_m...P_{2m-1}$ bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle P_0SQ$. Diese Frage wird durch folgende Teilaufgaben genauer erfaßt:

I. Man beweise die folgenden Aussagen (A) und (B) bei beliebig, aber fest vorgegebenem α

(A) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl n so, daß Punkte P_0, P_1, ..., P_n existieren, während der von P_n ausgehende Lichtstrahl nicht mehr den anderen Schenkel des Winkels $\sphericalangle P_0SQ$ erreicht.

(B) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl $m \geq 1$ so, daß Punkte P_0, P_1, ..., P_{m-1} existieren und (falls $m \geq 2$ ist) für $k = 1, ..., m-1$ die Ungleichung $\overline{SP_k} < \overline{SP_{k-1}}$ erfüllen, daß dagegen entweder kein Punkt P_m mehr existiert oder $\overline{SP_m} \geq \overline{SP_{m-1}}$ sowie (falls $m < n$ ist) für $k = m+1, ..., n$ sogar $\overline{SP_k} > \overline{SP_{k-1}}$ gilt.

II. Man ermittle alle diejenigen am Anfang vorzugebenden Werte α, zu denen es

(C) genau einen,

(D) genau zwei,

(E) genau n

Werte φ_0 mit der Eigenschaft gibt, daß für die in (B) gefundene Zahl m (ein Punkt P_m existiert und) die Gleichung $\overline{SP_m} = \overline{SP_{m-1}}$ gilt. In (E) sei dabei $n > 2$ eine gegebene natürliche Zahl.