23. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1983/1984

Aufgaben

23. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 231221:

Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, so bezeichne s_n ihre n-te Partialsumme: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Man ermittle

a) von jeder arithmetischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,

b) von jeder geometrischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,

die ersten fünf Glieder a_1, a_2, ..., a_5.

Aufgabe 231222:

Es sei $P = ABCA'B'C'$ ein gerades dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche ABC, der Deckfläche $A'B'C'$ und den parallelen Kanten AA', BB', CC'. Auf diesen seien drei Punkte X, Y, Z gelegen, X zwischen A und A', Y zwischen B und B', Z zwischen C und C'.

Man beweise, daß der Körper $K = ABCXYZ$ das Volumen $V_K = \frac{1}{3}F(x + y + z)$ hat, wobei $x = \overline{AX}$, $y = \overline{BY}$, $z = \overline{CZ}$ ist und F den Flächeninhalt von ABC bezeichnet.

Aufgabe 231223:

Es sei $ABCD$ ein beliebiges Trapez mit $AB \parallel CD$. Die Längen seiner Seiten und Diagonalen seien folgendermaßen bezeichnet:

$$\overline{AB} = a, \quad \overline{BC} = b, \quad \overline{CD} = c, \quad \overline{DA} = d, \quad \overline{AC} = e, \quad \overline{BD} = f.$$

Man beweise, daß dann stets die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$af^2 + ce^2 = (a + c)(ac + b^2) \qquad (1)$$
$$ae^2 + cf^2 = (a + c)(ac + d^2). \qquad (2)$$

Aufgabe 231224:

Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die die Zahl $2^n + 5$ eine Quadratzahl ist.