22. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1982/1983

Aufgaben

22. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 221241:

a) Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen $a \neq 0$, b und c so gibt, daß die für alle reellen x durch

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \tag{1}$$

definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0) = 1$, $f(2) = 1$ hat und bei $x = 1$ einen lokalen Extremwert besitzt!

b) Gegeben seien zwei beliebige reelle Zahlen x_1 und x_2 mit $0 < x_1 < x_2$.

Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von x_1 und x_2) alle diejenigen reellen $a \neq 0$, b, c mit der Eigenschaft, daß die durch (1) definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0) = 1$, $f(x_2) = 1$ hat und bei $x = x_1$ einen lokalen Extremwert besitzt!

Aufgabe 221242:

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, zu denen es nichtnegative reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 gibt, die die folgenden Gleichungen (1), (2), (3), (4) erfüllen:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \tag{1}$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = a, \tag{2}$$
$$x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4 = a^2, \tag{3}$$
$$x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 = a^3. \tag{4}$$

Aufgabe 221243:

Man untersuche, ob es nichtnegative

a) reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4,

b) ganze Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4

mit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ und $x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4$ gibt, so daß die Summe $s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ einen kleinsten Wert annimmt. Ist das der Fall, so ermittle man jeweils zu a) bzw. b) solche Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 sowie den zugehörigen Wert s.

Aufgabe 221244:

Man beweise, daß das Polynom

$$f(x) = \frac{1}{630} \cdot x^9 - \frac{1}{27} \cdot x^7 + \frac{13}{30} \cdot x^5 - \frac{82}{63} \cdot x^3 + \frac{32}{35} \cdot x$$

für alle ganzzahligen x ganzzahlige Werte annimmt.

Aufgabe 221245:

Es seien a_1, a_2, ..., a_n reelle Zahlen. Bei einem *ungestörten technischen Prozeß* sei

$$x_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n \tag{1}$$

die Maßzahl einer von a_1, a_2, ..., a_n abhängigen Größe. Bei einem *gestörten technischen Prozeß* betrage die Maßzahl dieser Größe dagegen

$$x_2 = \frac{a_1}{1+\varepsilon_1} + \frac{a_2}{1+\varepsilon_2} + ... + \frac{a_n}{1+\varepsilon_n}. \tag{2}$$

Dabei seien ε_1, ε_2, ..., ε_n reelle Zahlen, zu denen es eine natürliche Zahl $m \geq 1$ derart gibt, daß für alle $\mu = 1, 2, ..., n$ die Ungleichung

$$|\varepsilon_\mu| \leq 10^{-m} \quad \text{gilt.} \tag{3}$$

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen (1), (2), (3) stets die Ungleichung

$$|x_1 - x_1| \leq \frac{1}{10^m - 1} \left(|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|\right) \quad \text{folgt!}$$

Aufgabe 221246A:

Es sei $ABCD$ ein Tetraeder, bei dem die drei Kanten AD, BD und CD paarweise senkrecht aufeinanderstehen. Die Längen dieser Kanten AD, BD bzw. CD seien mit a, b, bzw. c bezeichnet. Ferner sei P ein beliebiger Punkt auf dem Rande des Dreiecks ABC, und dann sei jeweils g die Gerade durch D und P.

a) Man beweise, daß dann hiernach für die Summe s der Abstände der Punkte A, B und C von g stets

$$s \leq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)} \quad \text{gilt} \tag{1}$$

b) Man untersuche (in Abhängigkeit von den gegebenen Kantenlängen a, b, c), ob es einen Punkt P derart gibt, daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt. Wenn das der Fall ist, so ermittle man (in Abhängigkeit von a, b, c) alle diese Punkte P.

Aufgabe 221246B:

Bei der Untersuchung von Häufigkeitsverteilungen in der mathematischen Statistik treten Funktionen auf, die für endlich viele natürliche Zahlen definiert sind und für die gefordert wird, daß sie sogenannte Funktionalgleichungen (Gleichungen zwischen verschiedenen Funktionswerten) erfüllen. Ein Beispiel hierfür ist das folgende:

Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geq 2$ und eine reelle Zahl p mit $0 < p < 1$. Man ermittle (in Abhängigkeit von n und p) diejenigen Funktionen f mit der Menge $\{1, 2, ..., n\}$ als Definitionsbereich, die für $k = 1, 2, ..., n$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$\sum_{x=0}^{n} x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot ... \cdot (x-k+1) \cdot f(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot p^k. \tag{1}$$

Hinweis: Für $k = 1$ ist die Gleichung (1) sinngemäß als $\sum_{x=0}^{n} x \cdot f(x) = n \cdot p$ aufzufassen.