



22. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1982/1983

Aufgaben





22. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 220921:

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n , die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:

- (1) $n - 9$ ist eine Primzahl.
- (2) $n^2 - 1$ ist durch 10 teilbar.

Aufgabe 220922:

Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn x , y und z von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, dann sind

$$a = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 + (x - y\sqrt{z})^2}{2},$$
$$b = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 - (x - y\sqrt{z})^2}{2},$$
$$c = a^2 - (x^2 - y^2z)^2$$

natürliche Zahlen, und b ist ein Teiler von c .

Aufgabe 220923:

Von einem Quadrat $ABCD$ und vier Punkten P , Q , R , S wird folgendes vorausgesetzt:

- (1) P liegt auf der Strecke AB zwischen A und B ,
- (2) Q liegt auf der Strecke BC zwischen B und C ,
- (3) R liegt auf der Strecke CD zwischen C und D ,
- (4) S liegt auf der Strecke DA zwischen D und A ,
- (5) es gilt $PR \perp QS$.

Untersuchen Sie, ob für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, stets dieselbe der drei Aussagen $\overline{PR} < \overline{QS}$, $\overline{PR} = \overline{QS}$, $\overline{PR} > \overline{QS}$ gilt! Wenn das der Fall ist, nennen Sie diese Aussage!



Aufgabe 220924:

Die Abbildung zeigt ein Quadrat, das in 25 zueinander kongruente quadratische Felder $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$, zerlegt ist. Von diesen Feldern sollen genau fünf so durch Schwarzfärbung markiert werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie auseinander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

