



22. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1982/1983

Aufgaben





22. Mathematik-Olympiade 1. Stufe (Schulolympiade) Klasse 9 Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 220911:

Uwe sagt zu Gert: "Ich habe hier eine zweistellige Zahl z , deren Ziffern beide von 0 verschieden sind. Wenn ich diese Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibe und dahinter die Quersumme von z setze, dann erhalte ich das Quadrat von z ."

Gert findet ohne Benutzung der Zahlentafel eine Zahl z , die diese Eigenschaften hat.

Zeigen Sie, daß aus Uwes Angaben die Zahl z ohne Benutzung der Zahlentafel eindeutig ermittelt werden kann, und geben Sie z an!

Aufgabe 220912:

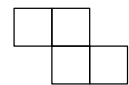
Ist n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, so bezeichne F_n eine quadratische Fläche, die wie ein Schachbrett in n gleich große quadratische Felder unterteilt ist. Ferner sei von Papptäfelchen der abgebildeten Formen (a), (b), (c) jeweils eine beliebige Anzahl vorhanden.



(a)



(b)



(c)

(Jedes dieser Täfelchen besteht aus vier gleich großen quadratischen Feldern, deren jedes den n^2 Feldern von F_n kongruent ist.)

Die Fläche F_n soll mit derartigen Täfelchen lückenlos bedeckt werden, und zwar soll dabei von jeder der Sorten (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen verwendet werden. Außerdem soll kein Feld von F_n mehrfach überdeckt werden und kein Täfelchen über F_n hinausragen.

- Beweisen Sie, daß diese Bedingungen für alle ungeraden n und für alle $n \leq 4$ nicht erfüllbar sind!
- Zeigen Sie, daß die Bedingungen für $n = 6$ erfüllbar sind!
- Untersuchen Sie, für welche geraden Zahlen $n \geq 8$ die Bedingungen erfüllbar sind!

Aufgabe 220913:

- Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x , für die der Term $\frac{4x-4}{2x-3}$ definiert ist.
- Ermitteln Sie unter den in a) gefundenen Zahlen x alle diejenigen, für die $0 < \frac{4x-4}{2x-3} < 1$ gilt!

Aufgabe 220914:

In einer Ebene ε befinde sich ein n -Eck mit den Eckpunkten A_1, A_2, \dots, A_n . Dieses sei die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S . Das Volumen der Pyramide sei V_P . Die Mittelpunkte der Kanten A_1S, A_2S, \dots, A_nS seien M_1, M_2, \dots, M_n . Ferner sei B_1 ein beliebiger Punkt in der Ebene ε .

Die zu M_1B_1 parallele Gerade jeweils durch einen der Punkte M_2, M_3, \dots, M_n schneide ε in B_2, B_3, \dots, B_n . Der Körper K mit den Eckpunkten $B_1, B_2, \dots, B_n, M_1, M_2, \dots, M_n$ habe das Volumen V_K .



-
- a) Beweisen Sie, daß alle Punkte M_1, M_2, \dots, M_n in einer gemeinsamen zu ε parallelen Ebene liegen und K daher ein Prisma ist!
- b) Beweisen Sie, daß V_K durch V_P eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie V_K in Abhängigkeit von V_P !