21. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1981/1982

Aufgaben

21. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 211241:

Man untersuche, ob sich aus 1 982 Zahlen a_1, a_2, ... , $a_{1\,982}$, die der Bedingung $|a_k| = 1 \quad (k = 1, 2, ..., 1\,982)$ genügen, aber sonst beliebig vorgegeben sind, stets Zahlen so auswählen lassen, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k ausgewählt.

(2) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k nicht ausgewählt.

(3) Die Summe aller ausgewählten Zahlen ist gleich der Summe aller nicht ausgewählten Zahlen.

Aufgabe 211242:

Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

In dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 1,\\ a_2x + b_2y + c_2z &= 1,\\ a_3x + b_3y + c_3z &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

belegt zunächst A einen der Koeffizienten a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl. Dann belegt B einen der verbleibenden Koeffizienten mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl, dann wieder A, dann B u.s.w., bis endlich A den letzten (neunten) Koeffizienten mit einer natürlichen Zahl belegt.

A hat gewonnen, wenn nach diesen Belegungen das Gleichungssystem (1) genau eine reelle Lösung (x, y, z) besitzt. B hat gewonnen, wenn nach den Belegungen das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele reelle Lösungen (x, y, z) besitzt.

Man untersuche, ob B durch geeignete Belegungen in jedem Falle den Gewinn erzwingen kann.

Aufgabe 211243:

Man beweise, daß sich aus fünf geraden *Stäben* kein räumlicher Streckenzug $ABCDEA$ bilden läßt, der die folgenden Eigenschaften (1) und (2) besitzt:

(1) Keine vier der fünf Punkte A, B, C, D, E liegen in einer gemeinsamen Ebene.

(2) Aus einer geeigneten Blickrichtung betrachtet, gilt (siehe Abbildung): Keine zwei der fünf Punkte A, B, C, D, E werden genau hintereinander (also scheinbar miteinander zusammenfallend) gesehen; ein innerer Punkt der Strecke CD verdeckt einen inneren Punkt von AE, ein innerer Punkt von BC verdeckt einen inneren Punkt von DE, ein innerer Punkt von AE verdeckt einen inneren Punkt von BC.

Hinweis: Unter einem inneren Punkt P einer Strecke XY versteht man einen von X und Y verschiedenen, d.h. zwischen diesen Punkten liegenden Punkt P der Strecke XY

Aufgabe 211244:

Es sei $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, ..., a_n, wobei $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ gelte. Man setze

$$r = \frac{|a_0| + |a_0| + ... + |a_{n-1}|}{|a_n|}$$

und beweise:

a) Ist $r \geq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-r \leq x \leq r$.

b) Ist $r \leq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-1 \leq x \leq 1$.

Aufgabe 211245:

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{\sphericalangle BCA} = 90°$.

Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte P des Raumes, für die $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$ gilt.

Aufgabe 211246A:

a) Man beweise: Wenn

$$a = \overline{BC}, \quad b = \overline{AC}, \quad c = \overline{AB}, \quad d = \overline{AD}, \quad e = \overline{BD}, \quad f = \overline{CD} \tag{1}$$

die Kantenlängen eines Tetraeders $ABCD$ sind, dann gilt für den Oberflächeninhalt A_O dieses Tetraeders die Ungleichung

$$A_O < \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2\right). \tag{2}$$

b) Man untersuche, ob sich die Aussage über (2) noch zu folgender Aussage verschärfen läßt: Es gibt eine kleinste reelle Zahl λ mit $\lambda < \frac{1}{3}$, so daß für den Oberflächeninhalt A_O jedes Tetraeders $ABCD$, wenn man dessen Kantenlängen wie in (1) bezeichnet, die Ungleichung

$$A_O \leq \lambda\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2\right). \tag{3}$$

gilt. Wenn das der Fall ist, so ermittle man diese Zahl λ.

Aufgabe 211246B:

Man ermittle alle diejenigen Funktionen f und g, die für alle nichtnegativen reellen Zahlen x definiert sind, reelle Funktionswerte haben und folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Für alle $x \geq 0$ gilt $f(x) \geq 1$ und $g(x) \geq 0$.

(2) Für alle $x \geq 0$ gilt $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1$.

(3) Für alle $x \geq 0$ und alle $y \geq 0$ gilt $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$.

(4) Für alle $x \geq 0$ und alle $y \geq 0$ gilt $g(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y)$.