21. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1981/1982

Aufgaben

21. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 211231:
Es sei $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3.

Man beweise : Wenn $P(x)$ eine Nullstelle der Form $x_0 = b + \sqrt{c}$ mit rationalen Zahlen b, c besitzt, für die $\sqrt{c}$ irrational ist, so ist auch $x_1 = b - \sqrt{c}$ eine Nullstelle von $P(x)$.

Aufgabe 211232:

a) Beweisen Sie, daß kein Polyeder existiert, das genau sieben Kanten besitzt!

b) Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n mit $n > 7$ ein Polyeder existiert, das genau n Kanten besitzt!

Hinweis: Ein Polyeder ist ein ebenflächig begrenzter Körper. Im Sinne der Aufgabenstellung wird positives Volumen vorausgesetzt; weitere Anforderungen wie Konvexität werden nicht gestellt.

Aufgabe 211233:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, für die folgendes gilt:

Die für alle reellen Zahlen $x \neq -c$ durch $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ definierte Funktion f genügt den folgenden Bedingungen:

(1) Es gibt reelle Zahlen x, für die $f(x)$, $f(f(x))$ und $f(f(f(x)))$ definiert ist.

(2) Für jede solche Zahl x mit $x \neq -1$ gilt $f(f(f(x))) = \frac{x-1}{x+1}$.

Aufgabe 211234:
Man ermittle alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen q, die die folgende Eigenschaft haben:

Es gibt eine von 0 verschiedene Zahl a_1 und eine natürliche Zahl $k \geq 3$ so, daß in der durch $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$ definierte Zahlenfolge (a_n) das Glied a_k gleich dem arithmetischen Mittel der beiden vorangehenden Glieder a_{k-1} und a_{k-2} ist.

Aufgabe 211235:
37 Karten, von denen jede auf der einen Seite rot und auf der anderen Seite blau gefärbt ist, seien so auf einen Tisch gelegt, daß genau 9 Karten von ihnen oben ihre blaue Seite zeigen. Es sollen nun in *Arbeitsgängen* Karten umgedreht werden, und zwar in jedem einzelnen *Arbeitsgang* genau 20 beliebige der 37 Karten.

Untersuchen Sie, ob man mit endlich vielen *Arbeitsgängen* erreichen kann, daß alle 37 Karten

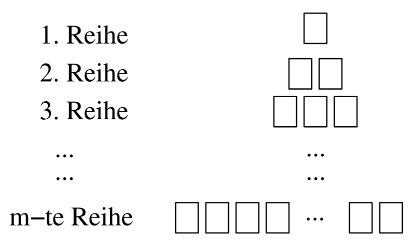
a) oben ihre rote Seite,

b) oben ihre blaue Seite

zeigen. Falls das möglich ist, ermitteln Sie jeweils die kleinste Anzahl der dafür hinreichenden *Arbeitsgänge*!

Aufgabe 211236A:

Unter einem *Stapel* von Gegenständen (wie z.B. Konservenbüchsen) sei eine Anordnung wie in der Abbildung verstanden, bei der jeweils für $k = 1, 2, ..., m$ in der k-ten Reihe genau k Gegenstände stehen. Dabei ist m eine natürliche Zahl, die als *Höhe* des Stapels bezeichnet werde. (Die Frage der praktischen Herstellbarkeit von Stapeln mit großer Höhe sei in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.)



Untersuchen Sie, ob eine Zahl z mit $1\,000 \leq z \leq 10\,000$ so existiert, daß es einen Stapel aus z Gegenständen gibt, der sich in zwei Stapel von untereinander gleicher Höhe umordnen läßt!

Aufgabe 211236B:

Man beweise für jede ganze Zahl n mit $n \geq 3$:

Ist A_n die Anzahl aller verschiedenen Darstellungen von n als Summe dreier positiver ganzzahliger Summanden, so gilt

$$\left| A_n - \frac{n^2}{12} \right| < \frac{1}{2}$$

Dabei werden zwei Darstellungen genau dann als verschieden bezeichnet, wenn sich nicht die eine durch Änderung der Reihenfolge der Summanden aus der anderen erhalten läßt.