21. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1981/1982

Aufgaben

21. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 211211:

Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks ABC. Auf diesem Dreieck als Grundfläche soll eine Pyramide $ABCD$ mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) errichtet werden:

(1) Die Kanten AD, BD und CD haben einander gleiche Länge s.

(2) Die Höhe h der Pyramide ist das arithmetische Mittel aus a und s.

Man untersuche, ob es eine derartige Pyramide $ABCD$ gibt und ob dann h und s eindeutig durch a bestimmt sind. Ist dies der Fall, so ermittle man h und s.

Aufgabe 211212:

Man ermittle alle geordneten Paare $(x; y)$ von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$(x+y)^2 + 3(x+y) = 4,$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6}.$$

Aufgabe 211213:

Eine Menge $\mathfrak{M}$ enthalte genau 55 Elemente. Für jede natürliche Zahl k mit $0 \leq k \leq 55$ bezeichne A_k die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von $\mathfrak{M}$, die genau k Elemente enthalten.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen k, für die A_k am größten ist!

Aufgabe 211214:

Jede natürliche Zahl läßt sich bekanntlich eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen.

In welcher der beiden natürlichen Zahlen $1\,981!$ und $1\,000! \cdot 981!$ erhält bei dieser Darstellung die Primzahl 7 den größeren Exponenten?

Hinweis: Wenn n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$ ist, so ist $n!$ definiert durch $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.