21. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1981/1982

Aufgaben

21. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210931:

Über eine natürliche Zahl x werden vier Paare von Aussagen gemacht:

Paar A: (1) x ist eine zweistellige Zahl.
(2) x ist kleiner als 1 000.

Paar B: (1) Die zweite Ziffer der Zahl x ist eine 0.
(2) Die Quersumme der Zahl x ist 11.

Paar C: (1) x wird mit genau drei Ziffern geschrieben, und zwar mit drei gleichen Ziffern.
(2) x ist durch 37 teilbar.

Paar D: (1) Die Quersumme der Zahl x ist 27.
(2) Das Produkt der Zahlen, die durch die einzelnen Ziffern von x dargestellt werden, beträgt 0.

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen x mit $x \neq 0$ gibt, für die in jedem der vier Paare A, B, C, D eine Aussage wahr und eine Aussage falsch ist! Gibt es solche Zahlen x, so ermitteln Sie alle diese Zahlen!

Aufgabe 210932:

Ist $ABCD$ ein Rechteck, für dessen Seitenlängen $b = \overline{AD} = 6\,\text{cm}$ und $a = \overline{AB} > b$ gilt, so seien E, G diejenigen Punkte auf CD und F, H diejenigen Punkte auf AB, für die $AFED$ und $HBCG$ Quadrate sind.

Beweisen Sie bei diesen Bezeichnungen, daß es genau eine Seitenlänge a gibt, für die $EH \perp AC$ gilt, und ermitteln Sie diese Seitenlänge!

Aufgabe 210933:

Beweisen Sie, daß die Ungleichung

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1\,000^{1\,000} < 1\,000^{500\,000} \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 210934:

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\alpha = 50°$, $r = 4\,\text{cm}$ und $h_a = 6\,\text{cm}$! Dabei bezeichne α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$, r den Umkreisradius und h_a die Länge der auf BC senkrechten Höhe des Dreiecks ABC.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist! Dabei sollen Dreiecke ABC, $A'B'C'$ auch dann als kongruent bezeichnet werden, wenn sie miteinander mit beliebiger Reihenfolge der Eckpunkte zur Deckung gebracht werden können.

Aufgabe 210935:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

Aufgabe 210936:

Bei einem Tetraeder $ABCD$ seien die Kantenlängen $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{AD} = 13$ cm, $\overline{BD} = 13$ cm geben, das Lot von D auf die Fläche des Dreiecks ABC sei 12 cm lang.

Beweisen Sie, daß durch diese Angaben die Länge der Kante CD eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Kantenlänge!