20. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1980/1981

Aufgaben

20. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 201221:

Für jedes $n = 1, 2, 3, ...$ sei

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k.$$

Ferner seien I_1, I_2, I_3 und I_4 die abgeschlossenen Intervalle

$$I_1 = \langle 1; 2\rangle, \qquad I_2 = \langle 0,53; 0,531\rangle, \qquad I_3 = \langle 0,509; 0,51\rangle, \qquad I_4 = \langle 0,4; 0,5\rangle.$$

Man untersuche für jedes dieser Intervalle, ob in ihm Glieder der Zahlenfolge $\{a_n\}$ liegen. Ist dies der Fall, so ermittle man jeweils die Indizes n aller Glieder a_n in dem betreffenden Intervall.

Aufgabe 201222:

Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für die die Zahlen

$$a = \frac{2k}{k+1}, \qquad b = \frac{k+1}{2}, \qquad c = \sqrt{k}$$

die Maßzahlen der (mit gleicher Maßeinheit gemessenen) Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

Aufgabe 201223:

An einem Fußballturnier nahmen n Mannschaften teil. Jede Mannschaft spielte dabei gegen jede andere Mannschaft genau einmal. Die jeweils siegreiche Mannschaft erhielt 2 Punkte, die unterlegene Mannschaft keinen Punkt, und bei unentschiedenem Ausgang erhielten beide Mannschaften je einen Punkt.

Nach Abschluß des Turniers wurden die Mannschaften auf die Plätze $1, 2, ..., n$ der Abschlußtabelle nach fallender Gesamtpunktzahl gesetzt. (Bei Punktgleichheit wurden dazu weitere Unterscheidungskriterien genutzt.)

Man ermittle die größtmögliche Zahl, die in allen (nach diesen Regeln) möglichen Turnieren als Punktdifferenz zwischen zwei in der Abschlußtabelle unmittelbar benachbarten Mannschaften auftreten kann.

Aufgabe 201224:

Man untersuche, ob es ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_0, a_1, ..., a_n gibt, das

a) für *drei* ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt;

b) für *vier* ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt.

Bejahendenfalls gebe man im Falle a) bzw. im Falle b) ein solches Polynom an.