20. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1980/1981

Aufgaben

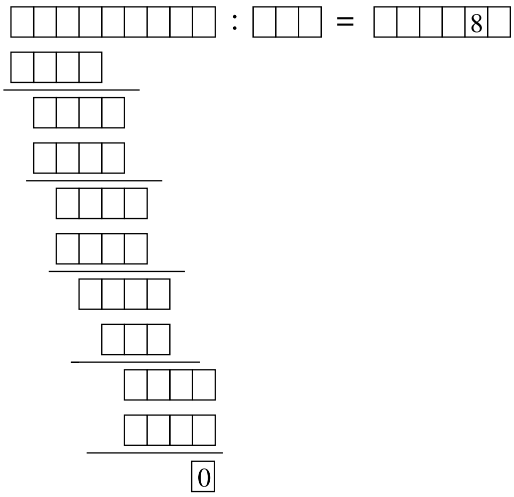
20. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 201211:

In dem folgenden Schema ist in jedes leere Feld jeweils eine Ziffer so einzutragen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht. Insbesondere darf keine der mehrstelligen Zahlen des ausgefüllten Schemas die erste Ziffer 0 erhalten.

Beweisen Sie, daß es genau eine Eintragung von Ziffern in die leeren Felder gibt, die diesen Anforderungen genügt! Ermitteln Sie diese Eintragung!



Aufgabe 201212:

Vier Personen A, B, C, D machen je zwei Aussagen über eine im dekadischen Positionssystem geschriebene nichtnegative ganze Zahl x. Es ist bekannt, daß

(1) von A, B, C genau einer zwei falsche Aussagen macht, während bei jedem der beiden anderen genau eine Aussage falsch ist,

(2) D zwei wahre Aussagen macht.

Die von A, B, C, D gemachten Aussagen lauten:

(A1) Die letzte Ziffer der dekadischen Darstellung von x ist gerade.

(A2) x ist Quadratzahl.

(B1) Die Ziffer 9 ist in der dekadischen Darstellung von x mindestens einmal vorhanden.

(B2) x ist vierstellig.

(C1) x ist durch 10 teilbar.

(C2) x läßt bei Division durch 3 den Rest 1 .

(D1) In der dekadischen Darstellung von x ist, falls x aus mehr als einer Ziffer besteht, von links beginnend, jede Ziffer um 1 kleiner als die jeweils rechts nachfolgende Ziffer.

(D2) Die Anzahl der geraden Ziffern in der dekadischen Darstellung von x ist nicht größer als 2.

Man ermittle alle Zahlen x, die dieses System von Bedingungen erfüllen!

Aufgabe 201213:

Eine gerade Pyramide K_1 mit quadratischer Grundfläche werde durch einen zu ihrer Grundfläche parallelen ebenen Schnitt in eine Teilpyramide K_2 und einen Pyramidenstumpf K_3 zerlegt. Die Kantenlängen der Grundflächen von K_1 und K_2 seien a_1 bzw. a_2, die Volumina von K_2 bzw. K_3 seien V_2 bzw. V_3.

Man ermittle $a_1 : a_2$ so, daß $V_2 : V_3 = 2 : 3$ gilt.

Aufgabe 201214:

In einem rechtwinkligen kartesischen x, y-Koordinatensystem seien gegeben:

Die Punkte $M(0;0)$, $F_1(2;0)$, $F_2(-2;0)$, $A(4;0)$, $B(0;2\sqrt{3})$, die Gerade g mit der Gleichung $x = -8$, der Kreis k_1 um M durch A, der Kreis k_2 um M durch B.

Unter der *Ellipse mit Brennpunkten F_1, F_2 und halber Hauptachsenlänge $\overline{MA}$* versteht man die Menge E_1 aller derjenigen Punkte $P(x; y)$, für die $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2 \cdot \overline{MA}$ gilt.

Unter der *Ellipse mit Brennpunkt F_2, Leitlinie g und Exzentrizität 1/2* versteht man die Menge E_2 aller Punkte $P(x; y)$ mit folgender Eigenschaft: Ist Q der Fußpunkt des Lotes von P auf g, so gilt $\overline{F_2P} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ}$.

Unter der *Ellipse durch A mit Hauptscheitelkreis k_1 und Nebenscheitelkreis k_2* versteht man die Menge E_3 aller derjenigen Punkte $P(x; y)$, die durch folgende Konstruktion erhalten werden können: Man zeichne einen beliebigen von M ausgehenden Strahl. Er schneidet k_1 bzw. k_2 in je einem Punkt R_1 bzw. R_2. Die Parallele durch R_1 zur y-Achse und die Parallele durch R_2 zur x-Achse schneiden sich in P.

Beweisen Sie, daß die drei Punktmengen E_1, E_2, E_3 einander gleich sind!