20. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1980/1981

Aufgaben

20. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

<u>Aufgabe 200931:</u>

In dem folgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe ohne Rest entsteht. Dabei können verschiedene Buchstaben auch durch gleiche Ziffern ersetzt werden. Wie üblich darf eine mehrstellig geschriebene Zahl nicht die Anfangsziffer 0 haben.

Beweisen Sie, daß es genau eine Ersetzung dieser Art gibt, die den Anforderungen der Aufgabe genügt! Ermitteln Sie diese Ersetzung!

$$\begin{array}{cccccccccccc}
a & b & c & 5 & 5 & : & 5 & d & e & = & f\ 5\ g \\
h & i & 5 & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
j & k & m & n & & & & & & & \\
p & 5 & k & r & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & s & t & u & v & & & & & & \\
 & w & x & y & z & & & & & &
\end{array}$$

<u>Aufgabe 200932:</u>

Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen, für die $a > b > c > d$ sowie $a + d = b + c$ vorausgesetzt wird.

Beweisen Sie, daß dann stets $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$ gilt!

<u>Aufgabe 200933:</u>

Von einem Rechteck $ABCD$ und einem Punkt P in seinem Innern wird $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\text{cm}$, $\overline{PB} = \sqrt{3}\,\text{cm}$, $\overline{PC} = \sqrt{5}\,\text{cm}$ vorausgesetzt.

Beweisen Sie, daß die Länge $\overline{PD}$ durch diese Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Länge!

<u>Aufgabe 200934:</u>

Ermitteln Sie alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a, b mit $a > b$, für die die folgenden Aussagen (1), (2), (3) zutreffen!

(1) Die Zahl a ist (in dekadischer Ziffernschreibweise) zweistellig, die Zahl b ebenfalls.

(2) Vertauscht man die Ziffern von a miteinander, so erhält man b.

(3) Subtrahiert man b^2 von a^2, so erhält man eine Quadratzahl.

Aufgabe 200935:

Beweisen Sie, daß man den Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ so durch eine Ebene schneiden kann, daß die Schnittfläche ein Quadrat ist!

Berechnen Sie aus der gegebenen Kantenlänge a des Tetraeders $ABCD$ den Flächeninhalt I eines solchen Quadrates!

Hinweis: Unter dem Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ versteht man denjenigen Körper, der von den Flächen der Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD begrenzt wird, wobei $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$ gilt.

Aufgabe 200936:

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $b = 7$ cm, $\beta = 40°$ und $h_b = 5$ cm! Dabei sollen b die Länge der Seite AC, β die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$ und h_b die Länge der von B ausgehenden Höhe bedeuten.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC gibt, das die geforderten Größen b, β und h_b aufweist!