19. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1979/1980

Aufgaben

19. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 191241:
Man ermittle alle Paare $(f(x); g(x))$ von Polynomen 3. Grades

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$
$$g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0,$$

deren Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 reelle Zahlen sind und für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jeder der Werte, die $f(x)$ und $g(x)$ für $x = 1$, 2, 3 und 4 annehmen, ist eine der Zahlen 0 und 1.

(2) Wenn $f(1) = 0$ oder $f(2) = 1$ ist, so ist $g(3) = 0$ und $g(4) = 1$.

(3) Wenn $f(1) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 1$ und $g(3) = 1$.

(4) Wenn $f(2) = 0$ oder $f(4) = 0$ ist, so ist $g(2) = 0$ und $g(4) = 0$.

(5) Wenn $f(3) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 0$.

Aufgabe 191242:
Es sei M die Menge aller derjenigen Quadratflächen Q, die in einer gegebenen Ebene ε liegen, einen gegebenen Punkt Z der Ebene ε als Mittelpunkt haben und eine gegebene Streckenlänge a als Seitenlänge haben.

Für beliebige Quadratflächen Q, Q' aus dieser Menge M bezeichne $u(Q \cap Q')$ den Umfang derjenigen Polygonfläche, die sich als Durchschnitt der Quadratflächen Q und Q' ergibt.

Man untersuche, ob es in M Quadratflächen Q, Q' mit kleinstmöglichem $u(Q \cap Q')$ gibt. Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von a) diesen kleinstmöglichen Wert von $u(Q \cap Q')$.

Aufgabe 191243:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die

$$2x + x^2y = y,$$
$$2y + y^2z = z,$$
$$2z + z^2x = x \quad \text{gilt.}$$

Dabei sind x, y und z durch Ausdrücke anzugeben, die aus gegebenen reellen Zahlen durch wiederholte Anwendung von Operationen +, -, ·, :, von reellwertigen Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrischen Funktionen oder von deren reellwertigen Umkehrfunktionen gebildet sind.

Aufgabe 191244:

Man beweise, daß keine natürlichen Zahlen n, m, b mit $n \geq 2$, $m \geq 2$ und $(2n)^{2n} - 1 = b^m$ gilt!

Aufgabe 191245:

Man beweise:

Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ und jede ganze Zahl $k \geq 2$ gilt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^k - 1} + \frac{1}{n^k} > k \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right).$$

Aufgabe 191246A:

Eine Folge $\{x_k\}$ reeller Zahlen heiße genau dann C-konvergent gegen eine reelle Zahl z, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right) = z \quad \text{gilt.}$$

Eine Funktion f heiße genau dann C-stetig an der Stelle a ihres Definitionsbereiches, wenn für jede Folge $\{x_k\}$, die C-konvergent gegen a ist und deren sämtliche Glieder x_k im Definitionsbereich von f liegen, die Folge $\{f(x_k)\}$ stets C-konvergent gegen $f(a)$ ist.

Man zeige:

a) Sind A, B und a beliebige reelle Zahlen, so gilt:

Die durch $f(x) = Ax + B$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f ist C-stetig an der Stelle a.

b) Wenn eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f an der Stelle $a = 0$ den Funktionswert $f(0) = 0$ hat und an dieser Stelle C-stetig ist, so gilt für beliebige reelle p, q die Gleichung $f(p+q) = f(p) + f(q)$.

Aufgabe 191246B:

In einer Dunkelkammer liegen ungeordnet 20 einzelne Handschuhe von gleicher Größe, und zwar

5 weiße Handschuhe für die rechte Hand

5 weiße Handschuhe für die linke Hand

5 schwarze Handschuhe für die rechte Hand

5 schwarze Handschuhe für die linke Hand

Zwei Handschuhe gelten genau dann als ein *passendes Paar*, wenn sie gleiche Farbe haben und der eine von ihnen für die rechte Hand, der andere für die linke Hand ist.

Unter einem *Zug* sei die Entnahme eines einzelnen Handschuhs verstanden, ohne daß dabei eine Auswahl nach Farbe und Form möglich ist. Ein *Spiel von n Zügen* bestehe darin, daß man nacheinander n Züge ausführt, die dabei entnommenen Handschuhe sammelt und erst nach diesen n Zügen feststellt, ob sich unter den n entnommenen Handschuhen (mindestens) ein passendes Paar befindet. Genau dann, wenn dies zutrifft, gelte das Spiel als $erfolgreich$.

a) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, daß ein Spiel von n Zügen mit Sicherheit erfolgreich ist!

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl k mit der Eigenschaft, daß ein Spiel von k Zügen mit größerer Wahrscheinlichkeit als 0,99 erfolgreich ist!