19. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1979/1980

Aufgaben

19. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 191211:

Es sei (bezüglich eines kartesischen x, y-Koordinatensystems) p die Parabel mit $y = x^2$ als Gleichung.

a) Man beweise: Durch den Punkt (0; 1) gibt es genau eine Sehne von p mit der Länge 2.

b) Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen $c \geq 0$, für die folgende Aussage gilt: Durch den Punkt $(0; c)$ gibt es genau zwei Sehnen von p mit der Länge 2.

Aufgabe 191212:

Für zwei Länder, *Normalland* und *Spiegelland*, und ihre Netze von Eisenbahnlinien sei folgendes vorausgesetzt:

(1) Jede Stadt X in Normalland hat genau eine Partnerstadt X' in Spiegelland. Dabei gilt: Zu jeder Stadt Y' in Spiegelland gibt es genau eine Stadt in Normalland, deren Partnerstadt Y' ist.

(2) Jede Eisenbahnlinie in Normalland stellt eine unmittelbare Verbindung zwischen zwei Städten her und berührt sonst keine andere Stadt. Dieselbe Aussage trifft für Spiegelland zu.

(3) Für je zwei Städte A, B in Normalland und ihre Partnerstädte A', B' in Spiegelland gilt: Entweder gibt es eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A und B, aber keine zwischen A' und B', oder es gibt eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A' und B', aber keine zwischen A und B.

(4) In Normalland gibt es zwei Städte P, Q, die so am Eisenbahnnetz gelegen sind, dass man wenigstens zweimal umsteigen muss, um von P nach Q zu gelangen.

Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen (1) bis (4) folgt: In Spiegelland kann man von jeder Stadt zu jeder anderen gelangen, ohne mehr als zweimal umsteigen zu müssen.

Aufgabe 191213:

Von einem Dreieck werde gefordert, dass sein Flächeninhalt gleich $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ ist, wobei a und b die Längen zweier Seiten des Dreiecks sind.

Man beweise, daß diese Forderung erfüllbar ist und dass durch diese Forderung die Größen der Winkel des Dreiecks eindeutig bestimmt sind. Man ermittle ferner diese Winkelgrößen.

Aufgabe 191214:

a) Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem

$$7x + 100\,y = 0 \tag{1}$$
$$0,069\,x + y = 0,3 \tag{2}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $(x_0,\, y_0)$ hat, und ermitteln Sie diese!

Im folgenden werde in Gleichung (2) des Systems (1), (2) der Koeffizient von x *innerhalb einer gegebenen -Umgebung von 0,069 verändert*, d.h., für gegebenes reelles $\delta > 0$ sei eine reelle Zahl h auf das Intervall

$$-\delta \le h \le \delta \tag{3}$$

eingeschränkt, und für jedes solche h sei das Gleichungssystem

$$7x + 100\,y = 0 \tag{1}$$
$$(0,069 + h)\,x + y = 0,3 \tag{4}$$

betrachtet. Man möchte erreichen, dass sich x_0 durch diese Veränderung des Koeffizienten 0,069 *um höchstens 1% ändern kann*. Damit ist die folgende Aufgabenstellung b), c) gemeint.

Zunächst wird definiert:

Besitzt für irgendein h das Gleichungssystem (1), (4) eine eindeutige Lösung, so sei diese mit $(x_h; y_h)$ bezeichnet. Ist dies (bei gegebenem $\delta > 0$) für alle in (3) genannten h der Fall und gibt es unter diesen Werten h einen, für den die Zahl

$$\eta = \frac{|x_0 - x_h|}{|x_0|}$$

möglichst groß ist, so werde dieser möglichst große Wert von η mit $\eta_{\max}$ (*bezüglich (3) maximaler relativer Fehler* von x) bezeichnet.

b) Ermitteln Sie alle diejenigen $\delta > 0$, für die ein bezüglich (3) maximaler relativer Fehler $\eta_{\max}$ existiert!

c) Ermitteln Sie unter den in b) gefundenen Werten von δ alle diejenigen, für die sogar $\eta_{\max} \le 0,01$ gilt!