



19. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1979/1980

Aufgaben





19. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 190831:

Klaus erzählt:

”Als ich kürzlich einkaufte, hatte ich genau drei Münzen bei mir. Beim Bezahlen stellte ich folgendes fest. Wenn ich zwei meiner Münzen hingebe, so fehlen noch 3,50 M bis zum vollen Preis der gekauften Ware, lege ich aber nur die übrige Münze hin, so erhalte ich 3,50 M zurück”

Ermittle aus diesen Angaben alle Möglichkeiten dafür, wieviel Münzen welcher Sorte Klaus bei sich gehabt hat! Dabei sind nur 1, 5, 10, 20, und 50 Pf. sowie 1, 2, 5, 10 und 20 Mark zu berücksichtigen.

Aufgabe 190832:

Gegeben seien ein Punkt M sowie ein Kreis k mit M als Mittelpunkt. Gesucht ist ein Quadrat $ABCD$, das folgende Eigenschaften hat:

- (1) Die Eckpunkte A und D liegen auf der Kreislinie k .
- (2) Die Quadratseite BC berührt den Kreis k in einem Punkt P , der zwischen B und C liegt.

Begründe und beschreibe eine Konstruktion, die (ausgehend von dem gegebenen Kreis k) zu einem Quadrat mit diesen Eigenschaften führt! Untersuche, ob es (zu gegebenen k) bis auf Kongruenz genau ein solches Quadrat gibt!

Aufgabe 190833:

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a .

Eine Parallele zu AB schneide die Seiten BC und AD in den Punkten E bzw. F , eine Parallele zu BC schneide AB und EF in den Punkten G bzw. H , und eine Parallele zu AB schneide die Strecken BE und GH in den Punkten J bzw. K .

- a) Ermittle den Umfang des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, daß die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander flächeninhaltsgleich sind!
- b) Ermittle den Flächeninhalt des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, daß die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander umfangsgleich sind!

Aufgabe 190834:

Beweise, daß das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, vermehrt um die mittlere Zahl, stets die dritte Potenz der mittleren Zahl ergibt!



Aufgabe 190835:

Es sei EG ein Durchmesser eines Kreises k . Die in E und G an k gelegten Tangenten seien t bzw. t' . Auf t sei eine Strecke AB so gelegen, daß E ihr Mittelpunkt ist. Die von A und B aus an k gelegten (und von t verschiedenen) Tangenten mögen t' in D bzw. C schneiden. Der Radius von k sei r ; die Längen von AB bzw. CD seien a bzw. c .

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die Gleichung $r^2 = \frac{ac}{4}$ gilt!

Aufgabe 190836:

Ein Taxifahrer hatte den Auftrag, um 15.00 Uhr einen Gast vom Bahnhof abzuholen. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ hätte er sein Ziel pünktlich erreicht. Auf Grund ungünstiger Verkehrsverhältnisse konnte er jedoch nur mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren und kam deshalb erst um 15.10 Uhr am Bahnhof an.

- a) Berechne die Länge des Weges, den der Fahrer bis zum Bahnhof zurückgelegt hat!
- b) Berechne die Zeit, die der Fahrer bis zum Bahnhof benötigte!