18. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1978/1979

Aufgaben

18. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 181211:

Bei der Mathematikolympiade treffen sich drei Schüler. "Ist euch schon aufgefallen", fragt einer von ihnen, ein Mädchen, daß wir Lang, Dick und Dünn heißen und daß auch genau einer von uns außergewöhnlich lang, genau ein anderer beachtlich dick und der dritte erschreckend dünn ist?"

"Ja, tatsächlich", entgegnet darauf ein anderer, der dünne Schüler, "aber bei keinem von uns stimmen Name und die den jeweiligen Schüler charakterisierende Eigenschaft überein." "Da hast du völlig recht!" stimmt ihm der Schüler namens Lang zu.

Wie heißt hiernach der lange Schüler, wie der dicke und wie der dünne Schüler, wenn darüber hinaus vorausgesetzt wird, daß das Mädchen, das gefragt hat, nicht dick ist? Welche der charakterisierenden Eigenschaften und welchen Namen hat das Mädchen?

Aufgabe 181212:

Man beweise, daß für jede natürliche Zahl $n > 5$ gilt:

Jedes Quadrat läßt sich in n Teilquadrate zerlegen.

Erklärung: Sind Q, T_1, ..., T_n Quadrate (als Flächen, einschließlich ihrer Randpunkte betrachtet), so liegt genau dann eine Zerlegung von Q in T_1, ..., T_n als Teilquadrate vor, wenn

(1) Q die Vereinigungsmenge der Mengen T_1, ..., T_n ist und

(2) für $i \neq j$ der Durchschnitt von T_i mit T_j stets entweder keine Punkte oder nur solche Punkte enthält, die sowohl für T_i als auch für T_j Randpunkte sind.

Aufgabe 181213:

Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x} = 3, \qquad y + \frac{1}{x} + \frac{x}{y} = 3.$$

Aufgabe 181214:

Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks. Um jeden der Eckpunkte dieses Dreiecks werde derjenige Kreis konstruiert, der die gegenüberliegende Seite berührt. Je zwei dieser Kreise haben im Innern des Dreiecks genau einen Schnittpunkt. Je zwei dieser drei Schnittpunkte lassen sich durch einen Bogen eines der konstruierten Kreise miteinander verbinden, wobei jeder dieser Bögen innerhalb der Dreiecksfläche liegt. Die drei Kreisbögen schließen ein Flächenstück ein.

Man drücke den Inhalt dieses (schraffierten) Flächenstücks in der Form $z \cdot a^2$ aus (wobei man die Zahl z mit einer durch die Zahlentafel ermöglichten Genauigkeit angebe).