17. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1977/1978

Aufgaben

17. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 171231:

Gegeben sei die Folge (a_n) durch

$$a_n = \frac{4n}{4n^2+121} \tag{1}$$

für $n = 1, 2, 3, ...$

Man ermittle die obere Grenze und die untere Grenze von (a_n), sofern diese existieren.

Aufgabe 171232:

Zu jeder ganzen Zahl a ermittle man alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x^4 + x^3 + a^2x^2 + x + 1 = 0.$$

Aufgabe 171233:

Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge s, in dem fünf kongruente Kugeln (mit den Mittelpunkten P, Q, R, S, T) so angeordnet sind, daß gilt:

(1) Die Kugel um P berührt die drei von A ausgehenden Seitenflächen ABC, ACD, ADB des Tetraeders,

(2) die Kugel um Q berührt die drei von B ausgehenden Seitenflächen,

(3) die Kugel um R berührt die drei von C ausgehenden Seitenflächen und

(4) die Kugel um S die drei von D ausgehenden Seitenflächen.

(5) Die Kugel um T berührt die vier übrigen Kugeln von außen.

Man ermittle den Radius r dieser fünf Kugeln.

Aufgabe 171234:

Man beweise, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc} \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 171235:

Man beweise folgenden Satz:

Sind u der Umfang, r der Radius des Inkreises und R der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC, dann gilt $R > \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{ur}$. Ist das Dreieck insbesondere rechtwinklig, dann gilt sogar $R \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{ur}$.

Aufgabe 171236A:

Es sei n eine natürliche Zahl mit $n > 1$.

a) Man ermittle alle diejenigen in der Menge R der reellen Zahlen definierten Funktionen f, die in R stetig sind und die Eigenschaft haben, daß für jede reelle Zahl x die Gleichung

$$f(x^n) = f(x) \tag{1}$$

gilt.

b) Man gebe eine in R definierte und unstetige Funktion f an, die die Eigenschaft (1) hat.

Aufgabe 171236B:

Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist. Beispielsweise gilt $\left[\frac{7}{2}\right] = 3; \quad [5] = 5; \quad [-\pi] = -4.$

Man beweise: Für jede reelle Zahl x und jede positive ganze Zahl n gilt

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + ... + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$