16. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1976/1977

Aufgaben

16. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

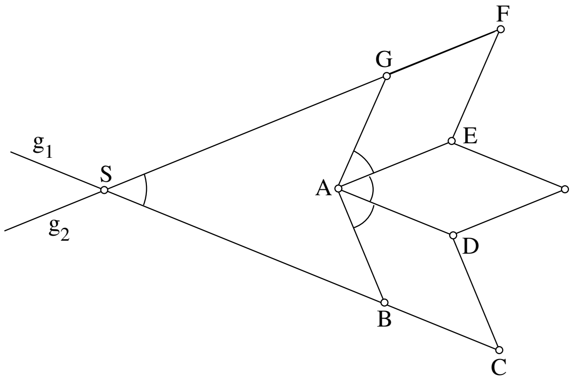
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160921:

Karlheinz betrachtet die in der Abbildung dargestellte, aus drei kongruenten Rhomben bestehende Figur. Dabei stellt er fest, daß der Winkel $\sphericalangle BSG$ genau so groß ist wie jeder der Winkel $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAE$, $\sphericalangle EAG$.

Nach einigem Nachdenken behauptet er, daß der folgende Satz gilt:

"Sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $AEFG$, die genau den Punkt A gemeinsam haben, so gegeben, daß die Winkel $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAE$ und $\sphericalangle EAG$ gleich groß und kleiner als 120° sind, dann hat auch der Winkel $\sphericalangle BSG$, den die Gerade g_1 durch B und C mit der Geraden g_2 durch F und G einschließt, die gleiche Größe wie jeder dieser drei Winkel."



Beweisen Sie diesen Satz!

Aufgabe 160922:

Die Zahl $\frac{20}{21}$ soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daß

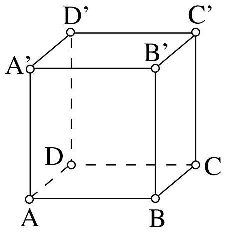
a) die beiden Summanden Brüche mit gleichem, von 21 verschiedenem Nenner und mit unterschiedlichen Zählern sind,

b) die beiden Summanden Brüche mit gleichem Zähler und mit unterschiedlichen Nennern sind.

Dabei sollen in jedem Bruch, der als Summand auftritt, jeweils der Zähler und der Nenner natürliche Zahlen sein, die zueinander teilerfremd sind.

Geben Sie für a) und b) je ein Beispiel einer derartigen Zerlegung an, und weisen Sie nach, daß es alle verlangten Eigenschaften hat!

Aufgabe 160923:



Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ (siehe Abbildung). Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $XYZTX$, wobei X, Y, Z und T in dieser Reihenfolge beliebige innere Punkte der Kanten AA', BB', CC' bzw. DD' seien.

Untersuchen Sie, ob es eine Lage derartiger Punkte X, Y, Z, T so gibt, daß der Streckenzug $XYZTX$ unter allen betrachteten Streckenzügen

a) minimale,

b) maximale

Gesamtlänge besitzt!

Aufgabe 160924:
In der folgenden Anordnung von Zeichen

$$\begin{array}{ccccr} ab & X & ab & = & cad \\ Y & & Y & & Z \\ ae & X & ae & = & ffe \\ \hline ff & Y & ff & = & gg \end{array}$$

sollen die einzelnen Symbole so durch Elemente des jeweiligen Grundbereichs ersetzt werden, daß jeweils wahre Aussagen entstehen.

Dabei ist der Grundbereich für die Kleinbuchstaben b, d, e die Menge der Ziffern von 0 bis 9, für a, c, f, g die Menge der Ziffern von 1 bis 9, und der Grundbereich für die Großbuchstaben X, Y, Z ist die Menge der Operationszeichen "$+$", "$-$", "$\cdot$" und ":". Gleiche Symbole bedeuten dabei gleiche, verschiedene Symbole verschiedene Elemente des jeweiligen Grundbereichs.

Untersuchen Sie, ob eine solche Ersetzung möglich ist, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle Ersetzungen mit den geforderten Eigenschaften!