14. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1974/1975

Aufgaben

14. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 141241:

Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $0 < a \leq b \leq c \leq d$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \quad \text{gilt.} \tag{1}$$

Aufgabe 141242:

Von einem Dreieck seien die Innenwinkel gemessen worden. Die Summe der dabei (als Näherungswerte der wahren Innenwinkelgrößen) erhaltenen Messwerte u, v, w sei $180° + \delta$ mit $\delta \neq 0°$. Durch drei Korrekturwerte x, y, z sollen die Messwerte so verändert werden, daß die Summe der dann entstehenden Werte $u + x$, $v + y$, $w + z$ gleich $180°$ ist.

Es ist zu beweisen, daß für alle unter diesen Bedingungen möglichen Korrekturwerte x, y, z der Wert $S = x^2 + y^2 + z^2$ genau dann am kleinsten ist, wenn $x = y = z = -\frac{\delta}{3}$ gilt.

Aufgabe 141243:

In einem Mathematikzirkel, in dem Eigenschaften von Funktionen f bei Kehrwertbildung untersucht werden, vermutet ein Zirkelteilnehmer, allgemein gelte für Funktionen f, die in einem Intervall J definiert sind und nur positive Funktionswerte haben, der folgende Satz:

(a) Ist f in J streng konkav, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konvex.

Ein anderer Zirkelteilnehmer meint, es gelte auch der folgende Satz:

(b) Ist f in J streng konvex, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konkav.

Man untersuche jeden dieser Sätze auf seine Richtigkeit.

Hinweise:

(1) Genau dann heißt $f(x)$ in J streng konvex bzw. konkav, wenn für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $x_1 < x^* < x_2$ der auf der von den Punkten $[x_1; f(x_1)]$ und $[x_2; f(x_2)]$ begrenzten Sehne gelegenen Punkt, dessen Abszisse x^* ist, eine Ordinate hat, die größer bzw. kleiner als $f(x^*)$ ist.

(2) Mit $\frac{1}{f}$ ist die durch die Festsetzung $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ für alle Zahlen x des Intervalls J definierte Funktion g bezeichnet.

Aufgabe 141244:

Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen x und y, für die die Gleichungen

$$24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 = 0 \quad \text{und} \tag{1}$$
$$x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 \quad \text{gelten.} \tag{2}$$

Aufgabe 141245:

Ist P ein Punkt im Innern eines regelmäßigen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, so seien die Abstände, die P von den vier Seitenflächen des Tetraeders hat, mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet. Mit h sei der Abstand bezeichnet, den A_4 von der Fläche des Dreiecks $A_1A_2A_3$ hat.

a) Man zeige, daß es genau einen Punkt P^+ im Innern von $A_1A_2A_3A_4$ gibt, für den alle vier Abstände x_1, x_2, x_3, x_4 den Wert $\frac{h}{4}$ haben.

b) Man beweise, daß für alle Punkte P im Innern des Tetraeders das Produkt $x_1x_2x_3x_4$ genau dann seinen größten Wert annimmt, wenn P mit dem in a) genannten Punkt P^+ zusammenfällt.

Aufgabe 141246A:

Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Jemand schreibt n Briefe, von denen jeder für genau einen unter n verschiedenen Adressaten vorgesehen ist, und steckt in jeden von n Umschlägen genau einen dieser Briefe, ohne vorher die Adressen auf die Umschläge zu schreiben. Da er nun nicht mehr weiß, in welchem Umschlag sich welcher Brief befindet, schreibt er willkürlich die n Adressen auf die n Umschläge (auf jeden Umschlag genau eine Adresse).

Man beweise: Die Wahrscheinlichkeit q_n dafür, daß bei keinem der Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, hat den Wert

$$q_n = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}.$$

Hinweis: Man bezeichne jede überhaupt mögliche Verteilung der Briefe an die Adressaten (jeder Brief an genau einen der Adressaten) einen "möglichen Fall". Unter diesen bezeichne man jede Verteilung, bei der für keinen Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, ein "günstiger Fall". Die Anzahl aller "möglichen Fälle" sei a_n genannt, die Anzahl aller "günstigen Fälle" g_n. Dann ist die genannte Wahrscheinlichkeit q_n definiert als $q_n = \frac{g_n}{a_n}$.

Aufgabe 141246B:

In der Ebene sei der "Abstand" zwischen zwei Punkten wie folgt definiert:

Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte, die in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten $(x_1; y_1)$ bzw. $(x_2; y_2)$ haben (x_1, x_2, y_1, y_2 seien reelle Zahlen), so sei ihr "Abstand"

$$d(P_1; P_2) = \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Man ermittle die Menge M aller Punkte der Ebene, die bezüglich des so definierten Abstandes von den Punkten $A(0; 2)$ und $B(1; 4)$ gleich weit entfernt sind.