14. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1974/1975

Aufgaben

14. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 141231:

In die 64 Felder eines Schachbretts sind die Zahlen 1, 2, ..., 64 so eingetragen, daß in der ersten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 1, 2, ..., 8, in der zweiten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 9, 10, ..., 16 u.s.w. in dieser Reihenfolge stehen.

Jemand soll nun acht Türme so auf Felder des Schachbretts stellen, daß keine zwei von ihnen einander schlagen können. Danach soll er die Summe S der Zahlen bilden, die auf den von den Türmen besetzten Feldern stehen. Es sind alle dabei möglichen Werte von S anzugeben.

Anmerkung: Zwei Türme können einander genau dann schlagen, wenn sie auf einer gemeinsamen waagerechten oder senkrechten Felderreihe stehen.

Aufgabe 141232:

Gegeben sei eine rationale Zahl c. Ferner sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller derjenigen Paare (a, b) aus rationalen Zahlen a, b, für die $a + b = c$ gilt.

Beweisen Sie, daß unter allen Produkten $a \cdot b$ mit $(a, b) \in \mathfrak{M}$ dasjenige am größten ist, das aus dem Paar (a, b) mit $a = b$ gebildet wurde!

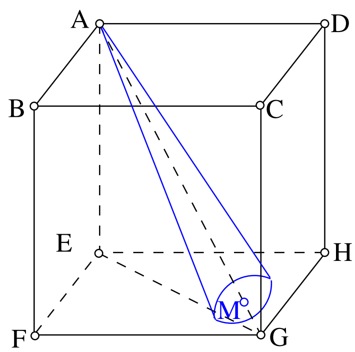
Aufgabe 141233:

Im Innern eines Würfels $ABCDEFGH$ mit den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$, $EFGH$ und mit der Kantenlänge a befindet sich ein gerader Kreiskegelkörper mit den folgenden Eigenschaften:

a) Seine Spitze fällt mit dem Eckpunkt A des Würfels zusammen.

b) Seine Achse liegt auf der Raumdiagonalen AG des Würfels.

c) Seine Grundfläche hat mit einer der drei Seitenflächen des Würfels, auf denen G liegt, genau einen Punkt gemeinsam.



Man beweise: Ist α die Größe des Winkels zwischen einer Seitenlinie und der Achse und r der Radius der Grundfläche des Kegelkörpers, so gilt

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{\cot\alpha + \sqrt{2}}.$$

Aufgabe 141234:

Es ist zu untersuchen, ob es eine Funktion $y = \log_a(bx + c)$ mit a, b, c reell; $a > 1$ gibt, deren Graph in einem x, y-Koordinatensystem durch die Punkte (2; 2), (-1; 0) und (0; 1) verläuft.

Man gebe, falls es eine solche Funktion gibt, alle reellen geordneten Zahlentripel (a, b, c) an, für die das zutrifft.

Aufgabe 141235:

Es seien in der Ebene fünf Punkte F, G, H, I, K gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.

Man begründe und beschreibe eine Konstruktion eines solchen Fünfecks $ABCDE$, daß F, G, H, I, K in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DE, EA des Fünfecks sind.

Man untersuche ferner, ob ein solches Fünfeck $ABCDE$ durch die gegebenen Punkte F, G, H, I, K eindeutig bestimmt ist. Dabei wird nicht vorgeschrieben, daß das Fünfeck $ABCDE$ konvex, nicht konvex oder überschlagen ist; es soll auch zugelassen sein, daß Ecken miteinander zusammenfallen oder Seiten teilweise ineinander oder in der Verlängerung voneinander liegen.

Aufgabe 141236A:

Ein in einem industriellen Prozeß eingebauter Meßkomplex M übermittelt an eine Übertragungseinheit A_1 genau eins der beiden Signale S_1 oder S_2, das dann von A_1 zu einer Übertragungseinheit A_2, von A_2 zu einer Übertragungseinheit A_3 und von A_3 zu einem Elektronenrechner R übermittelt wird. Jede Übertragungseinheit A_i ($i = 1, 2, 3$) kann genau die Signale S_1 oder S_2 übermitteln. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß A_i statt des jeweils empfangenen Signals gerade das andere weitervermittelt, betrage 0,01. Es sei nun bekannt, daß am Ende eines solchen Ablaufes durch A_3 in den Rechner R das Signal S_1 übertragen wurde.

Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß M zu Beginn dieses Ablaufes an A_1 ebenfalls S_1 übermittelt hatte?

Hinweis: Wenn sich unter den Voraussetzungen V in einer großen Anzahl n von Fällen insgesamt g solche befinden, bei denen ein Ereignis E eintritt bzw. eingetreten ist, so heißt die Zahl $p = \frac{g}{n}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten (bzw. Eingetretensein) von E unter den Voraussetzungen V.

Zur Lösung können außerdem folgende Sätze verwendet werden.

a) *Additionsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung für unabhängige Ereignisse:* Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von zwei einander ausschließenden Ereignissen E_1 und E_2 eins von beiden eintritt, ist gleich der Summe $p_1 + p_2$ der Wahrscheinlichkeit p_1 für das Eintreten von E_1 und der Wahrscheinlichkeit p_2 für das Eintreten von E_2.

b) *Multiplikationsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung:* Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ereignis E und ein Ereignis F eintreten, ist gleich dem Produkt $p \cdot q$ der Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten von E und der Wahrscheinlichkeit q dafür, daß unter der Voraussetzung von E das Ereignis F eintritt.

Aufgabe 141236B:

Es sei p eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x+p) = \frac{f(x)}{3f(x)-1} \quad \text{für alle reellen } x. \qquad (1)$$

a) Man beweise, daß jede derartige Funktion f (sofern es solche gibt) periodisch ist, d.h., daß es zu ihr eine von Null verschiedene reelle Zahl q gibt, so daß

$$f(x+q) = f(x) \quad \text{für alle reellen } x \text{ gilt.} \qquad (2)$$

b) Man gebe für einen speziellen Wert von p eine solche nicht konstante Funktion f an.

Hinweis: Man kann insbesondere untersuchen, ob eine Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{a + b \cdot \sin^2 x}{c + d \cdot \sin^2 x}$$

bei geeigneten Werten der Konstanten a, b, c, d für alle reellen x definiert ist, die Eigenschaft (1) hat und nicht konstant ist.