14. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1974/1975

Aufgaben

14. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 141221:

Es sei x_n $n = 0, 1, 2, 3, ...$ diejenige Zahlenfolge, für die $x_0 = 1$ und $x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + 1}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ gilt.

Man gebe die Glieder x_1, x_2 und x_3 dieser Zahlenfolge an. Man gebe einen Term $f(n)$ mit der Eigenschaft $f(n) = x_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ an.

Aufgabe 141222:

Gegeben sei eine rechteckige Tabelle mit drei Zeilen und vier Spalten, also mit 12 Feldern. In einem dieser Felder stehe die Zahl 0.

Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle übrigen Felder mit Hilfe der natürlichen Zahlen von 0 bis 9 derart auszufüllen, daß

(1) jede in der Tabelle vorkommende Zahl dort höchstens zweimal auftritt,

(2) die Summen der Zahlen in jeder der drei Zeilen gleich groß sind,

(3) die Summen der Zahlen in jeder der vier Spalten gleich groß sind, wobei diese (somit viermal auftretende) Summe größer als 15 ist.

Aufgabe 141223:

Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck und E der Schnittpunkt seiner Diagonalen AC und BD. Die Seite DA sei nicht parallel zur Seite BC, so daß sich die diese Seiten enthaltenden Geraden in einem Punkt F schneiden. Die Gerade g halbiere den Winkel $\sphericalangle BEA$ und die Gerade h den Winkel $\sphericalangle AFB$.

Man beweise, daß dann $g \parallel h$ ist.

Aufgabe 141224:

Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x + y + z = 0, \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad (2)$$
$$x^4 + y^4 + z^4 = a \qquad (3)$$

a) keine reellen Lösungen (x, y, z)

b) genau eine reelle Lösung,

c) mehr als eine reelle Lösung hat.