14. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1974/1975

Aufgaben

14. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140931:

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl x (wobei x nicht unbedingt einstellig sein soll), die folgende Eigenschaft hat:

Die Zahl $83 \cdot x$ (das Produkt aus 83 und x) hat als Darstellung die Ziffernfolge $3x8$ (d.h., vor die Ziffer oder Ziffernfolge der Zahl x ist eine 3, hinter die so gebildete Ziffernfolge eine 8 zu setzen).

Aufgabe 140932:

Man gebe alle geordneten Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ an, die folgender Bedingung genügen:

Die Summe der dritten Potenz der ersten beiden Zahlen des Quadrupels ist gleich der Differenz der dritten Potenz der letzten und vorletzten Zahl des Quadrupels.

Aufgabe 140933:

Von einem beliebigen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ seien die Längen $a = \overline{AB}$, $c = \overline{CD}$ seiner Parallelseiten sowie der Abstand h der diese beide Parallelseiten enthaltenen Geraden gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S.

Man berechne aus den gegebenen Längen a, c, h die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABS, BCS, CDS bzw. ADS.

Aufgabe 140934:

Man beweise, daß für beliebige reelle Zahlen x, y, z die folgende Beziehung gilt: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

Ferner gebe man für x, y, z Bedingungen an, die gleichwertig damit sind, daß in der genannten Beziehung das Gleichheitszeichen gilt.

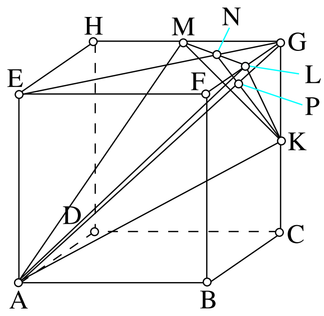
Aufgabe 140935:

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Auf dem Umkreis k des Dreiecks liege auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$, der C nicht enthält, ein von A und B verschiedener Punkt P. Symmetrisch zu P bezüglich der Geraden durch A und C bzw. der durch B und C mögen die Punkte P_1 und P_2 liegen.

a) Man beweise, daß C auf der Geraden g durch P_1 und P_2 liegt.

b) Man beweise, daß g genau dann die Tangente im Punkt C an den Umkreis k ist, wenn $CP \perp AB$ gilt.

Aufgabe 140936:



In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) und der Kantenlänge a seien K, L, M die Mittelpunkte der Seiten CG, FG bzw. HG.

Man ermittle das Volumen des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten A, K, L, M.