13. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1973/1974

Aufgaben

13. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 131241:

Es seien in einer Ebene zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren ψ und ζ gegeben. Dann wird durch

$$c_n = |\psi - n\zeta| \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{1}$$

eine Folge reeller Zahlen definiert. Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß die Folge (1)

a) streng monoton steigend,

b) streng monoton fallend ist.

c) Für den Fall, daß die Folge (1) nicht streng monoton ist, ist zu untersuchen, ob es eine natürliche Zahl n_0 gibt, so daß die Folge (1) die Monotonieintervalle $1 \leq n \leq n_0$ und $n_0 < n$ besitzt.

Aufgabe 131242:

Ist x eine reelle Zahl, so bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. (So ist z.B. $[\pi] = 3$; $[0,7] = 0$; $[-0,7] = -1$.)

a) Man zeige, daß es zwei rationale Zahlen a, b derart gibt, daß die Zahlen $c_n = an + b - [an + b]$, $(n = 1, 2, ...)$, eine nicht-konstante Zahlenfolge bilden und daß dabei alle $c_n \neq 0$ sind.

b) Man beweise, daß für je zwei rationale Zahlen a, b die in a) definierte Zahlenfolge ein Minimum besitzt.

Aufgabe 131243:

Es seien n_1 und n_2 zwei positive ganze Zahlen; in einer Ebene seien eine Menge M_1 aus $2n_1$ voneinander verschiedenen Punkten sowie eine Menge M_2 aus $2n_2$ voneinander und von jedem der Punkte aus M_1 verschiedenen Punkten so gelegen, daß es keine Gerade gibt, die durch drei dieser $2n_1 + 2n_2$ Punkte geht.

Man beweise, daß dann eine Gerade g mit folgender Eigenschaft existiert:

Zerlegt g die Ebene in die Halbebenen H und K (wobei g selbst weder zu H noch zu K gerechnet werde), so liegen sowohl in H als auch in K jeweils genau die Hälfte aller Punkte aus M_1 und genau die Hälfte aller Punkte aus M_2.

Aufgabe 131244:

Man ermittle alle Paare (f, g) von Funktionen, die für alle von -1; 0 und 1 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und für alle diese x die Gleichungen

$$x \cdot f(x) - \frac{1}{x} \cdot g(\frac{1}{x}) = 1 \quad \text{und} \tag{1}$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot f(x) = x^2 \cdot g(x) \quad \text{erfüllen.} \tag{2}$$

Aufgabe 131245:

a) In einer Ebene sei $P_1P_2...P_n$ ein beliebiges konvexes n-Eck E.

Man beweise folgende Aussage:

Sind n Punkte $Q_1...Q_n$ so im Innern oder auf dem Rand von E gelegen, daß $Q_1Q_2...Q_n$ ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i eine Ecke von E.

b) Gibt es nichtkonvexe n-Ecke E, für die die in a) genannte Aussage falsch ist?

c) Ist für jedes nichtkonvexe n-Eck E die in a) genannte Aussage falsch?

Aufgabe 131246A:

Erklärungen: Auf einem Schaltbrett sei eine Anzahl n von Knöpfen $K_1, ..., K_n$ zum Ein- und Ausschalten von Stromkreisen $S_1, ..., S_n$ angebracht. Für jeden Knopf K_i werde durch einmaliges Drücken der Stromkreis S_i vom ausgeschalteten Zustand in den eingeschalteten Zustand bzw. umgekehrt vom eingeschalteten in den ausgeschalteten Zustand überführt, unabhängig von den anderen Stromkreisen.

Unter einem "Schaltbild" B sei die gleichzeitige Angabe der Zustände aller Stromkreise S_i verstanden; z.B. stellt die Ausgangsstellung, bei der alle Stromkreise S_i ausgeschaltet sind, ein Schaltbild dar, das mit B_0 bezeichnet sei. Sind B und B' Schaltbilder, so werde unter der "Summe" $B \oplus B'$ dasjenige Schaltbild verstanden, das nach folgender Vorschrift entsteht:

Es sei B dadurch gekennzeichnet, daß genau die Stromkreise $S_{n_1}, ..., S_{n_p}$ eingeschaltet sind; es sei B' dadurch gekennzeichnet, daß genau die Stromkreise $S_{k_1}, ..., S_{k_p}$ eingeschaltet sind.

Dann beginne man mit dem Schaltbild B_0 und

(a) drücke die Knöpfe $K_{n_1}, ..., K_{n_p}$, jeden genau einmal. Anschließend (ohne nach B_0 zurückzugehen!)

(b) drücke man genau die Knöpfe $K_{k_1}, ..., K_{k_q}$, jeden genau einmal.

Unter dem "Produkt" $B \otimes B'$ werde dasjenige Schaltbild verstanden, das nach folgender Vorschrift entsteht:

Man beginne mit dem Schaltbild B_0, verfahre nach den Vorschriften (a), (b) und anschließend

(c) drücke man genau diejenigen Knöpfe, die bei mindestens einem der beiden Teilprozesse (a), (b) bereits gedrückt worden waren, jedoch noch genau einmal.

Man beweise die folgenden beiden Aussagen:

(1) Sind B, B', B'' Schaltbilder, so gilt

$$(B \oplus B') \otimes B'' = (B \otimes B'') \oplus (B' \otimes B'').$$

(2) Sind B, B' Schaltbilder, so gibt es genau ein Schaltbild B^* mit der Eigenschaft $B^* \oplus B' = B$, nämlich $B^* = B \oplus B'$.

Aufgabe 131246B:

a) Man beweise folgende Behauptung:

Es gibt keine ganzrationale Funktion f, bei der für jedes x die beiden Ungleichungen

$$f(x) > f''(x), \qquad (1)$$
$$f'(x) > f''(x) \quad \text{gelten.} \qquad (2)$$

b) Entsteht eine richtige Behauptung, wenn man in der bei a) gemachten Behauptung die Ungleichung (2) durch

$$f(x) > f'(x) \quad \text{ersetzt?} \qquad (3)$$