13. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1973/1974

Aufgaben

13. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 131231:

Die in vollen Lebensjahren gerechneten Altersangaben einer Familie sollen folgende Bedingungen erfüllen:

Vor zehn Jahren war der Vater so alt wie seine beiden Kinder zusammen. Vor einigen vollen Jahrzehnten war er achtmal so alt wie sein Sohn, während gleichzeitig seine Tochter dreimal so alt war wie ihr Bruder. Der Altersunterschied zwischen Vater und Tochter beträgt mehr als 20 Jahre und zwischen Vater und Sohn weniger als 40 Jahre.

Man ermittle für das jetzige Alter von Vater, Sohn und Tochter alle Angaben, die diesen Bedingungen entsprechen.

Aufgabe 131232:

Man beweise, daß die Ungleichung

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[m]{a^m + b^m}$$

für alle positiven reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen m, n mit $n > m$ gilt.

Aufgabe 131233:

Es sei $V = ABCD$ ein beliebiges (konvexes oder nichtkonvexes) nicht überschlagenes ebenes Viereck. Ferner seien A', B', C', D' diejenigen Punkte, für die die Vierecke $ABA'D$, $ABCB'$, $C'BCD$, $AD'CD$ Parallelogramme sind.

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen folgende Aussage gilt:

Dann und nur dann, wenn V nichtkonvex ist, liegen alle vier Punkte A', B', C', D' außerhalb von V.

Aufgabe 131234:

Gegeben sei ein nicht notwendig regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 und P_4. Wir betrachten 4 Kugeln K_i $(i = 1, ..., 4)$ mit P_i als Mittelpunkt von K_i.

Man beweise, daß die Forderung, derartige Kugeln sollen sich paarweise von außen berühren, genau dann erfüllbar ist, wenn

$$\overline{P_1P_2} + \overline{P_3P_4} = \overline{P_1P_3} + \overline{P_2P_4} = \overline{P_1P_4} + \overline{P_2P_3} \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 131235:

Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks ABC seien $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{4}$.

Man beweise: Sind α, β und γ die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks, so hat die Gleichung

$$x \sin \alpha + y \sin \beta + z \sin \gamma = 0$$

als einzige Lösung im Bereich aller Tripel ganzer Zahlen das Zahlentripel $(x; y; z) = (0;0;0)$.

Aufgabe 131236A:

Eine Menge $\mathfrak{G}$ von Elementen u, v, w, ... heißt genau dann eine Gruppe, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) In $\mathfrak{G}$ ist eine Operation definiert, d.h., jedem Paar (u,v) von Elementen u und v aus $\mathfrak{G}$ ist eindeutig ein Element w aus $\mathfrak{G}$ zugeordnet, wofür man $u \circ v = w$ schreibt.

(2) Diese Operation ist assoziativ, d.h., für alle Elemente u, v, w aus $\mathfrak{G}$ gilt $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.

(3) Zu jedem Paar von Elementen u und v aus $\mathfrak{G}$ existiert mindestens ein Element x aus $\mathfrak{G}$, so daß $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus $\mathfrak{G}$, so daß $y \circ u = v$ gilt.

Es sei $\mathfrak{P}$ die Menge aller reeller Zahlen. Für je zwei Elemente a, b aus $\mathfrak{P}$ ist durch $a \circ b = a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}$ eine Operation definiert.

Man beweise, daß die Menge $\mathfrak{P}$ mit dieser Operation eine Gruppe ist.

Aufgabe 131236B:

$\mathfrak{M}$ sei die Menge aller Punkte $P(x, y)$ eines ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems, wobei x, y ganzrationale Zahlen seien, für die $0 \leq x \leq 4$ und $0 \leq y \leq 4$ gilt.

Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei beliebiger Auswahl zweier verschiedener Punkte aus $\mathfrak{M}$ der Abstand dieser beiden Punkte eine ganzrationale Maßzahl besitzt (Maßeinheit sei die Einheit des Koordinatensystems).

Hinweis: Wenn n die Anzahl der verschiedenen Auswahlmöglichkeiten zweier Punkte und m die Anzahl derjenigen Auswahlmöglichkeiten ist, bei denen der Abstand eine ganzrationale Maßzahl besitzt, so nennt man den Quotienten $\frac{m}{n}$ die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit. Dabei heißen zwei Auswahlmöglichkeiten genau dann verschieden, wenn die bei ihnen ausgewählten (aus je zwei Punkten bestehenden) Mengen verschieden sind.