13. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1973/1974

Aufgaben

13. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 131221:

Es seien a_0 und q reelle Zahlen mit $a_0 \neq 0$; $q \neq 0$; $q \neq 1$. Ferner sei $\{a_i\}$ eine geometrische Folge, für die $a_i = a_0 \cdot q^i$ $(i = 0, 1, 2, 3, ...)$ gilt.

a) Man beweise, daß die Folgen

$\{b_i\}$ mit $b_i = a_{i+1} - a_i$ und

$\{c_i\}$ mit $c_i = b_{i+1} - b_i$ ebenfalls geometrische Folgen sind.

b) Es sind alle Werte von a_0 und q (mit $a_0 \neq 0$; $q \neq 0$) anzugeben, für die die in a) definierten Folgen $\{a_i\}$ und $\{c_i\}$ die Eigenschaft haben, daß $a_i = c_i$ für alle natürlichen Zahlen i gilt.

Aufgabe 131222:

Jeder von 41 Schülern einer Klasse hatte an genau drei Leichtathletik-Wettkämpfen im Laufen teilzunehmen. Dabei mußte jeder dieser Schüler je einmal auf den Bahnen 1, 2 und 3 antreten.

Schüler A meint, daß es in dieser Klasse allein auf Grund dieser Bestimmungen mindestens sieben Schüler geben müsse, bei denen die Reihenfolge der Startbahnen übereinstimmte. Schüler B meint dagegen nach einigem Nachdenken, daß es sogar acht solcher Schüler geben müsse.

Man überprüfe, ob jede dieser beiden Meinungen richtig ist.

Aufgabe 131223:

In einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ seien E der Mittelpunkt der Seite AB und F der der Seite CD. Der Schnittpunkt von AF mit DE sei G, der von BF mit CE sei H genannt.

Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Vierecks $EHFG$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AGD und BHC ist.

Aufgabe 131224:

Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$$x^3 + y^2 + x + 1 = 0 \qquad (1)$$
$$y^3 + x^2 + y + 1 = 0 \qquad (2)$$

sind.