13. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1973/1974

Aufgaben

13. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 131211:

Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10 000 000 000.

Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen (aus $\mathfrak{M}$), bei deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus $\mathfrak{M}$, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt.

Aufgabe 131212:

Aus einem geraden Kreiskegelstumpf soll ein Kegelkörper herausgeschnitten werden, dessen Spitze der Mittelpunkt der (größeren) Grundfläche des Kegelstumpfes ist und dessen Grundfläche mit der Deckfläche des Kegelstumpfes zusammenfällt.

Man ermittle diejenigen Werte des Verhältnisses des Radius der Grund- zum Radius der Deckfläche des Kegelstumpfes, für die das Volumen des entstehenden Restkörpers sechsmal so groß ist wie das des ausgeschnittenen Kegelkörpers.

Aufgabe 131213:

Es seien a und n natürliche Zahlen mit $a \geq 2$ und $n \geq 2$.

Man beweise: Die Menge $\mathfrak{M}= \{a, a^2, ..., a^n\}$ ist nicht die Vereinigung zweier solcher elementefremder nichtleerer Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, für die die Summe der in $\mathfrak{M}_1$ enthaltenen Zahlen gleich der Summe der in $\mathfrak{M}_2$ enthaltenen Zahlen ist.

Aufgabe 131214:

Gegeben seien k reelle Zahlen a_1, a_2, ... , a_k (k natürliche Zahl, $k \geq 1$), für die

(1) $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k$ und

(2) $a_1 + a_2 + ... + a_k = 1$ gilt.

Man beweise, daß dann für alle natürlichen Zahlen n mit $0 < n \leq k$ die Ungleichung

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq \frac{1}{k} \quad \text{erfüllt ist.}$$