12. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1972/1973

Aufgaben

12. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 121231:

Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und die Gleichung $\tan x + \cot x = 4$ erfüllen. (Eine Ausrechnung der Zahlenwerte als Dezimalbrüche wird nicht verlangt.)

Aufgabe 121232:

Im Raum seien vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 gegeben, die nicht in ein und derselben Ebene liegen.

Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Ebenen, die von diesen vier Punkten gleich weit entfernt sind.

Aufgabe 121233:

Drei Schulen, je eine aus Adorf, Bedorf und Cedorf, führten bei einem Kreissportfest einen Leichtathletikwettkampf durch. In jeder Disziplin stellte jede Schule genau einen Teilnehmer. Ein Reporter interviewte nach dem Wettkampf einen Zuschauer:

Reporter: "Wer hat den gesamten Wettkampf gewonnen?"

Zuschauer: "Adorf gewann den Weitsprung, aber den gesamten Wettkampf gewann Bedorf, und zwar mit 22 Punkten. Adorf und Cedorf erreichten je 9 Punkte."

Reporter: "Wie wurden die Punkte verteilt?"

Zuschauer: "In jeder der Disziplinen erhielt der Erste eine bestimmte Punktzahl, der Zweite eine kleinere, der Dritte eine noch kleinere, aber mindestens einen Punkt. Diese Verteilung war für alle Disziplinen dieselbe. Alle Punktzahlen waren ganzzahlig."

Reporter: "In wieviel Disziplinen fand der Wettkampf insgesamt statt?"

Zuschauer: "Ich weiß es nicht."

Reporter: "Wer hat das Kugelstoßen gewonnen?"

Zuschauer: "Ich weiß es nicht, aber Kugelstoßen war dabei."

Ermitteln Sie, ob die folgenden beiden Fragen auf Grund dieser (sämtlich als wahr vorausgesetzten) Aussagen eindeutig beantwortet werden können, und geben Sie alle Antworten, die mit diesen Aussagen vereinbar sind, an!

a) Welche der drei Schulen gewann das Kugelstoßen?

b) Welche Schule belegte beim Weitsprung den zweiten Platz? (Es sei bekannt, daß in jeder der Disziplinen eine eindeutige Reihenfolge der Wettkampfteilnehmer ermittelt wurde.)

Aufgabe 121234:

Es seien a und b natürliche Zahlen, für die $0 \leq b < a$ gilt. Ferner sei durch $z_n = an + b$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ eine Folge natürlicher Zahlen gegeben. Ein Element z_m dieser Folge habe mit a den größten gemeinsamen Teiler d.

Es ist festzustellen, ob dann alle Elemente dieser Folge mit a den größten gemeinsamen Teiler d haben.

Aufgabe 121235:

Man untersuche, ob es regelmäßige n-Ecke gibt, bei denen die Differenz der Längen einer größten und einer kleinsten Diagonale gleich der Seitenlänge des n-Ecks ist. Wenn ja, so gebe man alle natürlichen Zahlen n $(n \geq 4)$ an, für die das gilt.

Aufgabe 121236A:

Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgenden Eigenschaften hat:

(1) Für alle x gilt $f(x) = x \cdot f(x+1)$.

(2) Es gilt $f(1) = 1$.

a) Man ermittle alle ganzen Zahlen n, für die $f(n) = 0$ gilt.

b) Es seien m und n beliebige ganze Zahlen, und es sei $f(x+m)$ gegeben. Man berechne $f(x+n)$.

c) Man gebe eine spezielle Funktion f_0 an, die die obigen Eigenschaften besitzt, und zeichne den Graph dieser Funktion im Intervall $-3 \leq x \leq 4$.

Aufgabe 121236B:

Ist n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, so seien auf einer Strecke $\overline{AB}$ Punkte P_1, P_2, P_3, ..., P_{2n-1} in dieser Reihenfolge so gelegen, daß sie die Strecke $\overline{AB}$ in $2n$ Teile gleicher Länge zerlegen.

a) Man gebe (als Funktion von n) die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß zwei aus den Punkten P_1, P_2, P_3, ..., P_{2n-1} ausgewählte Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ die Strecke $\overline{AB}$ derart zerlegen, daß sich aus den drei Teilstrecken $\overline{AP_k}$, $\overline{P_kP_m}$, $\overline{P_mB}$ ein Dreieck konstruieren läßt.

b) Man untersuche, ob diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert konvergiert, und ermittle, wenn dies der Fall ist, diesen Grenzwert.

Anmerkung: Die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit ist folgendermaßen definiert:

Jede Auswahl zweier Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ sei als ein "Fall" bezeichnet. Ein "Fall" heiße ein "günstiger Fall", wenn P_k und P_m so gewählt sind, daß sich aus den Strecken $\overline{AP_k}$, $\overline{P_kP_m}$ und $\overline{P_mB}$ ein Dreieck bilden läßt. Ist z die Anzahl aller möglichen "Fälle" und z_1 die Anzahl aller "günstigen Fälle", so wird die genannte Wahrscheinlichkeit als der Quotient $\frac{z_1}{z}$ definiert.