12. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1972/1973

Aufgaben

12. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 121221:
Es seien u und v zwei ungerade natürliche Zahlen, für die $u > v$ gilt.

a) Man beweise, daß dann $x = u \cdot v$; $y = \frac{u^2 - v^2}{2}$ und $z = \frac{u^2 + v^2}{2}$ drei natürliche Zahlen sind, für die $x^2 + y^2 = z^2$ gilt, d. h. daß (x, y, z) ein pythagoreisches Zahlentripel bilden.

b) Geben Sie je eine hinreichende Bedingung dafür an, daß $x > y$ bzw. $x < y$ gilt!

Aufgabe 121222:
Es sind alle geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a, b anzugeben, für die das Polynom $f(x) = x^2 + ax + b$ ein Teiler des Polynom $g(x) = x^4 + ax^2 + b$ ist.

Definition: Ein Polynom $f(x)$ heißt genau dann Teiler eines Polynom $g(x)$, wenn es ein Polynom $h(x)$ gibt, so daß $f(x) \cdot h(x) = g(x)$ gilt.

Aufgabe 121223:
Man beweise, daß für keine natürliche Zahl n die Zahl $6n + 2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Aufgabe 121224:
In einer Stadt soll ein Netz von mindestens zwei Autobuslinien eingerichtet werden. Dieses Liniennetz soll folgenden Bedingungen genügen:

(1) Auf jeder Linie gibt es genau drei Haltestellen.

(2) Jede Linie hat mit jeder anderen Linie genau eine Haltestelle gemeinsam.

(3) Es ist möglich, von jeder Haltestelle aus jede andere Haltestelle mit einer Linie zu erreichen, ohne zwischendurch auf eine andere Linie umsteigen zu müssen.

Man ermittle alle Möglichkeiten für die Anzahl der Autobuslinien eines solchen Netzes.