



12. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1972/1973

Aufgaben





12. Mathematik-Olympiade

1. Stufe (Schulolympiade)

Klasse 12

Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 121211:

Eine "utopische Aufgabe":

Als im dritten Jahrtausend u. Z. innerhalb von zwei Tagen nacheinander vier Kosmonauten von Planeten anderer Sonnensysteme auf einem Kosmodrom der Erde landeten, war die Verständigung der Erdbewohner mit ihnen, aber auch die der Kosmonauten untereinander zunächst schwierig. Zwar waren diese durch die Farben Rot, Gelb, Schwarz und Blau ihrer Raumanzüge leicht zu unterscheiden, über ihre Herkunft aber war nichts bekannt. Erst nach einiger Zeit konnte festgestellt werden, daß sie von vier verschiedenen Planeten A , B , C und D zur Erde kamen.

Folgende Informationen konnte man erhalten:

Der rote und der schwarze Kosmonaut waren schon einmal auf einer kosmischen Reise zusammengetroffen und kannten sich daher. Der von A kommende Kosmonaut war dagegen nicht mit dem von B und der von C stammende Kosmonaut nicht mit dem von D bekannt. Der rote und der schwarze Kosmonaut konnten sich gut verständigen, und bald konnten das auch der gelbe und der blaue Kosmonaut, während sich die Kosmonauten von A und D nach wie vor nur schlecht verständigen konnten.

Nach langwierigen Berechnungen konnte festgestellt werden, daß der gelbe Kosmonaut älter war als der blaue. Ferner war der von D kommende Kosmonaut älter als der von B kommende und der von A stammende älter als der von C stammende.

Beim Versuch festzustellen, welcher Kosmonaut von welchem Planeten kam, zeigte sich, daß die obigen Angaben dazu noch nicht ausreichen. Immerhin konnte man ermitteln, daß für eine der vier Anzugfarben nur noch der Kosmonaut von A oder der von D in Frage kam.

Auf Grund weiterer Informationen ergab sich, daß der von D stammende Kosmonaut diese Farbe trug. Damit war zwar auch die Anzugfarbe des von B kommenden Kosmonauten ermittelt, aber bei den beiden übrigen noch keine Klarheit darüber vorhanden, welche Anzugfarbe zu welchem Planeten gehörte. Erst durch die zusätzliche Information, daß der Anfangsbuchstabe der (in deutscher Sprache bezeichneten) Farbe des Raumanzugs des von A kommenden Kosmonauten im Alphabet hinter dem Anfangsbuchstaben der Farbe des Raumanzugs des von C kommenden Kosmonauten steht, konnte die Herkunft der Kosmonauten schließlich geklärt werden.

Von welchem Planeten stammte der rote, von welchem der gelbe, von welchem der schwarze und von welchem der blaue Kosmonaut?

Aufgabe 121212:

Man beweise den folgenden Satz:

Gelten für die Maßzahlen a, b, c der mit gleicher Maßeinheit gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks die Bedingungen $1 < a < \sqrt{2}$, $1 < b < \sqrt{2}$, $1 < c < \sqrt{2}$, so ist das Dreieck spitzwinklig.



Aufgabe 121213:

Gegeben seien drei reelle Zahlen a, b und c .

$$\text{Zu der Funktion } y = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (1)$$

$$\text{soll eine Funktion } y = x^3 + mx + n \quad (2)$$

ermittelt werden, so daß der Graph von (2) in einem rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem durch eine Verschiebung des Graphen von (1) parallel zur x -Achse entsteht.

Man zeige, daß dies immer möglich ist und daß die Funktion (2) eindeutig bestimmt ist. Die dabei auftretenden Zahlen m und n sind anzugeben.

Aufgabe 121214:

Es sind alle geordneten Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen x und y ($x \leq y$) anzugeben, für die die Gleichung $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}$ erfüllt ist.