



12. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1972/1973

Aufgaben





12. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 120731:

An einer Oberschule mit genau 500 Schülern bestehen mathematisch-naturwissenschaftliche, künstlerische und Sport-Arbeitsgemeinschaften. Über die Teilnahme von Schülern an diesen Arbeitsgemeinschaften ist folgendes bekannt:

- (1) Genau 250 Schüler sind Mitglied mindestens einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
- (2) Genau 125 Schüler gehören mindestens einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft an.
- (3) Genau 225 Schüler nehmen mindestens an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitsgemeinschaft teil.
- (4) Genau 25 Schüler besuchen mindestens sowohl eine künstlerische als auch eine Sport-Arbeitsgemeinschaft.
- (5) Genau 75 Schüler sind mindestens sowohl Mitglied einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
- (6) Genau 25 Schüler nehmen mindestens sowohl an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch an einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft teil.
- (7) Genau 5 Schüler gehören allen drei genannten Arbeitsgemeinschaftsarten an.

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Schule, die

- a) an genau einer Art dieser Arbeitsgemeinschaften,
- b) an keiner dieser Arbeitsgemeinschaften teilnehmen!

Aufgabe 120732:

Beweise, daß es unter 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste nicht kleiner als 1 und deren größte nicht größer als 100 ist, stets mindestens zwei Zahlen gibt, von denen die eine gleich dem Doppelten der anderen ist!

Aufgabe 120733:

Konstruiere ein konvexes Fünfeck $ABCDE$, das folgende Eigenschaften hat:

- (1) $\overline{AB} = \overline{CD} = 5 \text{ cm}$,
- (2) $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ABC = 95^\circ$,
- (3) $\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{BE}$,



(4) $\overline{AE} = \overline{ED}$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen (1) bis (4) ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 120734:

Als die Klasse 7a den Fachunterrichtsraum für Mathematik betrat, war an der Wandtafel eine Multiplikationsaufgabe angeschrieben. Jemand hatte jedoch die Ziffern derart verwischt, daß nur noch vier "Einsen" leserlich geblieben waren und von den unleserlichen Ziffern lediglich noch zu erkennen war, an welcher Stelle sie gestanden hatten.

Das Bild an der Wandtafel hatte folgendes Aussehen: (Die unleserlichen Ziffern sind hier durch die Buchstaben a, b, c, \dots angegeben. Dabei können also verschiedene Buchstaben auch die gleiche Ziffer, möglicherweise auch nochmals die Ziffer 1, bezeichnen.)

$$\begin{array}{r}
 1 \ a \ b \cdot c \ d \\
 \hline
 e \ f \ g \ 1 \\
 h \ i \ j \ 1 \\
 \hline
 k \ m \ n \ 1 \ p
 \end{array}$$

Einige Schüler versuchten sofort, die fehlenden Ziffern zu ermitteln, und schon nach kurzer Zeit rief Bernd: "Ich weiß genau, wie die beiden Faktoren hießen!" Doch Gerd entgegnete ihm: "Es läßt sich nicht eindeutig feststellen, wie die beiden Faktoren lauteten."

Stelle fest, ob Bernd oder Gerd recht hatte! Gib in jedem Falle alle Lösungen (Realisierungen) des Multiplikationsschemas an!

Aufgabe 120735:

Ermittle alle nichtnegativen rationalen Zahlen x , die die Gleichung $x + |x - 1| = 1$ erfüllen!

Aufgabe 120736:

Beweise den folgenden Satz:

Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gilt: Zieht man bei zwei beliebigen Höhen dieses Dreiecks jeweils durch deren Mittelpunkt die Parallele zu der zur Höhe gehörenden Dreiecksseite, so schneiden sich diese Parallelen in einem Punkt, der auf der dritten Dreiecksseite liegt!