11. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1971/1972

Aufgaben

11. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 111231:

Gegeben seien in einer Ebene zwei sich schneidende Geraden g und h. Die Größe des einen ihrer vier Schnittwinkel sei $\alpha \leq 90°$.

a) Es ist zu beweisen: Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen der Ebene, erst an g, dann an h, lassen sich stets durch eine Drehung der Ebene ersetzen (d.h., sie sind einer Drehung der Ebene äquivalent). Deren Drehpunkt und Drehwinkel sind zu ermitteln.

b) Es ist festzustellen, ob sich dieselbe Drehung wie in a) ergibt, wenn man erst an h und dann an g spiegelt.

Aufgabe 111232:

Man beweise, daß die Gleichung $4^x + 6^x = 9^x$ keine rationalen Lösungen besitzt.

Aufgabe 111233:

21 leere Felder, die in Form eines Rechtecks von 3 Zeilen und 7 Spalten wie in der Abbildung angeordnet sind, sollen so mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 belegt werden, daß jedes Feld mit genau einer der angegebenen Zahlen belegt wird und dabei insgesamt jede dieser Zahlen dreimal vorkommt. Dabei sollen die drei Zahlen jeder Spalte paarweise voneinander verschieden sein, und von den sechs Zahlen in je zwei Spalten dürfen höchstens zwei übereinstimmen.

Man gebe eine Belegung der geforderten Art an und begründe, wie sich eine derartige Belegung finden läßt.

Aufgabe 111234:

a) Es seien $a_0 = -4$ und $a_1 = 2$ die ersten beiden Glieder einer unendlichen Folge $\{a_n\}$. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ das arithmetische Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.

Man zeige, daß die so definierte Folge $\{a_n\}$ eine geometrische Folge ist, und berechne für sie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

b) Es seien a_0 und a_1 die ersten beiden Glieder einer Folge $\{a_n\}$. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ arithmetisches Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.

Geben Sie in Form von Relationen zwischen a_0 und a_1 eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß $\{a_n\}$ eine geometrische Folge ist!

Aufgabe 111235:

Es ist zu beweisen, daß

$$\frac{1}{1-\sin 2x} + \frac{1}{1-\sin 2y} \geqslant \frac{2}{1-\sin(x+y)} \tag{1}$$

für alle reellen Zahlenpaare (x, y) mit

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad 0 < y < \frac{\pi}{4} \tag{2}$$

erfüllt ist.

Ferner ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, daß in (1) unter der Nebenbedingung (2) Gleichheit eintritt.

Aufgabe 111236A:

Eine Menge M von Elementen u, v, w, ... heißt eine Gruppe bezüglich einer Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

a) Jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus M ist vermöge der Operation A genau ein Element w aus M zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).

b) Die Operation A ist assoziativ, d.h., für alle Elemente u, v, w aus M gilt: $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.

c) Zu je zwei Elementen u und v aus M existiert mindestens ein Element x aus M, so daß $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus M, so daß $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun K die Menge aller geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a und b, für die $a^2 + b^2 = 1$ gilt. Ferner sei in K eine Operation A wie folgt definiert:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Man beweise, daß K eine Gruppe bezüglich A ist.

Aufgabe 111236B:

50 weiße und 50 schwarze Kugeln sind so in zwei äußerlich nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen, daß keine Urne leer bleibt und alle Kugeln verwendet werden.

Wie ist die Aufteilung der Kugeln auf die beiden Urnen vorzunehmen, wenn die Wahrscheinlichkeit, beim (blindlings erfolgenden) einmaligen Wählen einer der beiden Urnen und Ziehen einer Kugel aus ihr eine weiße Kugel zu ergreifen, so groß wie möglich ausfallen soll?

Hinweise:

1. In der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses als Quotient aus der Anzahl g der für dieses Ereignis "günstigen" Fälle und der Gesamtzahl m aller möglichen Fälle definiert, also $p = \frac{g}{m}$ gesetzt.

2. Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, aus einer Urne, die insgesamt u Kugeln und darunter w weiße enthält, (blindlings) eine weiße Kugel zu ziehen, als $p = \frac{w}{u}$ anzusetzen.

3. Sind zwei Urnen vorhanden, bei denen die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel p_1 bzw. p_2 betragen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis "Auswahl einer der beiden Urnen und Ziehen einer weißen Kugel aus der gewählten Urne" zu $p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$.