11. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1971/1972

Aufgaben

11. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110731:
Ermittle alle Primzahlen p, die gleichzeitig den folgenden Bedingungen genügen:

(1) $p < 100$.

(2) p läßt sowohl bei Division durch 3 als auch bei Division durch 5 jeweils den Rest 2.

(3) p läßt bei Division durch 4 den Rest 1!

Aufgabe 110732:
In einer Klasse mit 28 Schülern beteiligen sich alle Schüler am außerunterrichtlichen Sport, und zwar jeder an mindestens einer der folgenden vier Sportarten: Fußball, Leichtathletik, Schwimmen und Turnen, in jeder dieser Sportarten mindestens 1 Schüler. Kein Schüler beteiligt sich an einer Sportart, die hier nicht aufgezählt ist.

Bekannt ist von den Schülern dieser Klasse:

(1) Jeder Schüler betreibt höchstens zwei Sportarten.

(2) Genau 18 Schüler beteiligen sich an genau einer Sportart.

(3) Von den Schülern, die Leichtathletik betreiben, nimmt genau die Hälfte auch noch am Turnen teil.

(4) Jeder Schwimmer betreibt zwei Sportarten, wobei alle anderen Sportarten in gleicher Anzahl vertreten sind.

(5) Die Anzahl der Schüler, die nur Turnen, ist gleich der Anzahl der Schüler, die nur Fußball spielen.

(6) Die Menge der Schüler, die sowohl turnen als auch Fußball spielen, ist leer.

(7) Die Anzahl der Schüler, die sowohl Turnen als auch Leichtathletik betreiben, ist gleich der Anzahl derjenigen unter den restlichen Schülern, die sich ebenfalls an zwei Sportarten beteiligen.

Ermittle die Anzahlen aller Schüler dieser Klasse, die sich an

a) Fußball

b) Leichtathletik

c) Schwimmen

d) Turnen

beteiligen!

Aufgabe 110733:

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Auf BC liege ein Punkt P_1 derart, daß $\overline{BP_1} = \overline{P_1C}$ gilt, auf CD liege ein Punkt P_2 mit $\overline{P_2D} = 3\,\overline{CP_2}$ und auf DA liege ein Punkt P_3 mit $\overline{P_3A} = 3\,\overline{DP_3}$.

Ein Punkt P wandere auf Seiten des Quadrates von P_1 über B und A nach P_3.

Es sei nun A_Q der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und A_V der des Vielecks $PP_1P_2P_3$.

Ermittle sämtliche Lagen von P, für die das Verhältnis $A_Q : A_V$

a) am größten,

b) am kleinsten ist!

Berechne das Verhältnis für jeden der beiden Fälle!

Dabei sei auch zugelassen, daß P mit P_1 bzw. P_3 zusammenfällt, falls hierbei eines der gesuchten Verhältnisse auftritt.

Aufgabe 110734:

Fritz erzählt:

"In unserer Klasse gibt es genau doppelt soviel Mädchen wie Jungen. Wären es je 5 Jungen und Mädchen weniger, dann hätten wir genau dreimal soviel Mädchen wie Jungen."

Ermittle die Anzahl aller Mädchen und die aller Jungen dieser Klasse!

Aufgabe 110735:

Beweise den folgenden Satz:

Ist P ein Punkt, der im Innern oder auf dem Rande eines Quadrates $ABCD$ liegt, so ist die Summe der Längen der Verbindungsstrecken von P mit den vier Eckpunkten A, B, C, D größer als die doppelte Länge einer Quadratseite!

Aufgabe 110736:

Konstruiere ein Dreieck ΔABC aus $c = 5\,\text{cm}$, $h_a = 4,5\,\text{cm}$, $s_a = 5,5\,\text{cm}$! Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_a die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch B und C senkrecht steht, und s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!