10. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1970/1971

Aufgaben

10. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 101241:

Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, zu denen es reelle Zahlen x gibt, so daß $\sqrt{a+x}$ und $\sqrt{a-x}$ reell sind und die Ungleichung $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$ erfüllt ist.

Wie lauten die Werte von x in Abhängigkeit von a?

Aufgabe 101242:

Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn h eine reelle Zahl ist und wenn eine ganzrationale Funktion f vom Grade n mit reellen Koeffizienten keine reellen Nullstellen besitzt, so gilt dasselbe von der ganzrationalen Funktion F, die durch

$$F(x)=f(x)+h\cdot f'(x)+h^2\cdot f''(x)+\cdots+h^n\cdot f^{(n)}(x) \text{ definiert ist.}$$

Aufgabe 101243:

Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Haben je drei von vier in der gleichen Ebene liegenden konvexen Vielecksflächen jeweils einen Punkt gemeinsam, so gibt es einen Punkt, der jeder der vier Vielecksflächen angehört.

Aufgabe 101244:

Zwei Personen A und B spielen folgendes Spiel:

In dem Gleichungssystem

$$x+a_1y=b_1 \qquad (1)$$
$$a_2y+b_2z=a_3 \qquad (2)$$
$$b_3x+a_4z=b_4 \qquad (3)$$

wählt zunächst A für den Koeffizienten a_1, dann B für den Koeffizienten b_1, dann wieder A für a_2, dann B für b_2 u.s.w., zum Schluß B für b_4 je eine beliebige ganze Zahl.

A hat genau dann gewonnen, wenn das System (1), (2), (3) genau eine ganzzahlige Lösung (x, y, z) hat.

a) Kann A so spielen, d.h., kann er die Koeffizienten $a_1,\dots,a_4$ jeweils nach der Wahl von $b_1,\dots,b_3$ durch B so auswählen, daß er gewinnt?

b) Kann A von vornherein für die Koeffizienten $a_1,\dots,a_4$ solche Werte angeben, daß er unabhängig von der Wahl der Koeffizienten durch B (in jedem Falle) gewinnt?

Aufgabe 101245:

Es seien $A_0A_1\dots A_n$ $(n \geqslant 2)$ ein ebener konvexer Polygonzug der Länge s mit $A_0 \neq A_n$. Die Punkte $A_1, \dots, A_{n-1}$ mögen auf ein und derselben Seite der Geraden g durch A_0 und A_n liegen.

Anmerkung: Ein ebener Polygonzug $A_0A_1\dots A_n$ heiße konvex, wenn der durch die Strecke A_0A_n geschlossene Polygonzug eine konvexe Fläche begrenzt.

Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt F der bei Rotation des Polygonzuges um g entstehenden Fläche nicht größer als $\pi \cdot \frac{s^2}{2}$ ist, daß also $F \leqslant \pi \cdot \frac{s^2}{2}$ gilt.

Aufgabe 101246A:

Definition: Eine Menge M von Elementen u, v, w, ... heißt genau dann eine Gruppe, bezüglich der algebraischen Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

a) Jedem geordneten Paar $[u, v]$ von Elementen aus M ist vermöge der Operation A ein Element w aus M zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).

b) Die algebraische Operation A ist assoziativ, d.h., für alle Elemente u, v, w aus M gilt: $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.

c) Zu je zwei Elementen u und v aus M existiert mindestens ein Element x aus M, so daß $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus M, so daß $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun P die Menge aller Polynome ersten Grades $f(x) = a_0 + a_1x$, wobei a_0, a_1 rationale Zahlen sind und $a_1 \neq 0$ gilt.

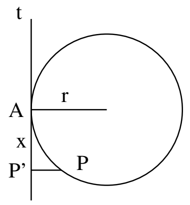
Ferner sei in P eine algebraische Operation A wie folgt definiert: Sind $f(x)$ und $g(x)$ Polynome aus P, so ist $f(x) \circ g(x) = g[f(x)]$.

Es ist zu entscheiden, ob P eine Gruppe bezüglich A ist.

Aufgabe 101246B:

In einem ebenen Gelände erfolge das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r, falls außerdem eine Tangente t an diesen Kreisbogen und ihr Berührungspunkt A bekannt sind, dadurch, daß in beliebigen Punkten P' von t (mit $\overline{AP'} = x < r$) Senkrechte auf t errichtet und auf ihnen (nach der Seite von t, auf der der Kreisbogen liegt) Strecken $P'P$ so abgetragen werden, daß die Punkte P Punkte des gesuchten Kreisbogens sind. Dabei gelte $\overline{P'P} = y < r$.

a) Man beweise, daß dann $y = \frac{x^2}{2r-y}$ gilt!



b) In der Praxis genügt es oft, Näherungswerte für y zu ermitteln. Das geschieht auf folgende Weise:

Einen ersten Näherungswert y_1 erhält man aus der Gleichung $y_1 = \frac{x^2}{2r}$.
Falls dessen Genauigkeit nicht ausreicht, wird ein zweiter Näherungswert y_2 aus der Gleichung $y_2 = \frac{x^2}{2r-y_1}$ ermittelt.

Analog kann weiter verfahren werden, bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist.

Untersuchen Sie, ob es eine kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft gibt, daß für alle positiven reellen Zahlen $x \leqslant \frac{1}{n}r$ der relative Fehler $\delta = \frac{|y-y_1|}{r}$ des Näherungswertes $y_1 = \frac{x^2}{2r}$ nicht größer als 0,001 ausfällt, daß also $\delta \leqslant 0{,}001$ gilt.