10. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1970/1971

Aufgaben

10. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 101231:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Sind α, β, γ die Größen der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks, so gilt:

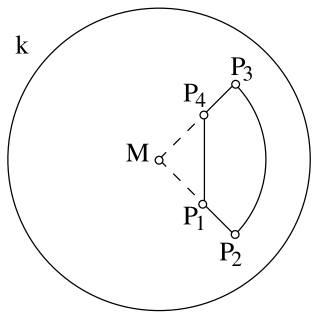
$$\sin^2 \gamma \geqslant \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta.$$

Aufgabe 101232:

In einer Ebene ε liegt ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Als Spiegelung am Kreis k sei diejenige Vorschrift bezeichnet, durch die jedem Punkt $P \neq M$ in ε der folgendermaßen definierte Punkt P' in ε zugeordnet wird:

(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.

(2) $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = r^2$.



Gegeben sei ferner ein im Innern von k gelegener Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ der folgenden Gestalt:

P_1, P_2 seien auf einem und demselben Strahl gelegen; P_3, P_4 auf einem und demselben anderen von M ausgehenden Strahl. Es gelte $\overline{MP_1} = \overline{MP_4} < \overline{MP_2} = \overline{MP_3}$. Der Winkel $\sphericalangle P_2MP_3$ sei kleiner als 180°. Der Kurvenzug bestehe aus den Strecken P_1P_2, P_3P_4 und P_4P_1 sowie aus dem im Innern des Winkels $\sphericalangle P_2MP_3$ gelegenen Bogen $\overset{\frown}{P_2P_3}$ des Kreises um M durch P_2.

Spiegeln Sie diesen Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ an k (Beschreibung und Begründung einer Konstruktion unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal.)

Aufgabe 101233:

Es sei f die für alle reellen Zahlen x durch $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^6+4}$ definierte Funktion.
Es ist zu entscheiden, ob unter allen Funktionswerten $f(x)$ ein größter und ein kleinster Wert vorkommen. Diese Werte sind gegebenenfalls zu ermitteln.

Aufgabe 101234:

Es sind alle ganzrationalen Funktionen $y = f(x)$ anzugeben, die für alle reellen x die Gleichungen $f(t \cdot x) = t \cdot f(x)$ erfüllen. Dabei sei t eine beliebig gegebene und dann festgehaltene zu denkende reelle Zahl.

Aufgabe 101235:

Es seien zwei nicht in ein und derselben Ebene liegende (also zwei windschiefe) Geraden g_1 und g_2 gegeben.

Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P, zu denen es Punkte P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2 mit der Eigenschaft gibt, daß P die Strecke P_1P_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilt.

Anmerkung: Eine Gerade g ist zu einer Ebene ε genau dann parallel, wenn es in ε eine Gerade gibt, die zu g parallel ist.

Aufgabe 101236:

Es sei M_1 die Menge aller Punkte, deren Koordinaten x, y in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die folgenden Ungleichungen erfüllen (x, y reell):

$$y \geq 0 \qquad (1)$$
$$y - 2x \leq 1 \qquad (2)$$
$$y + 2x \leq 1 \qquad (3)$$

Ist ferner n eine positive ganze Zahl, so sei B_n die Menge aller Punkte, für deren Koordinaten die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\frac{2^n - 3}{2^n} < y < \frac{2^n - 1}{2^n} \qquad (4)$$
$$-\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}} \qquad (5)$$

a) Stellen Sie M_1, B_1, B_2, B_3, B_4 graphisch dar.

b) Es ist zu beweisen, daß es einen Punkt $P \in M_1$ gibt, der in keiner der Punktmengen B_n enthalten ist.

c) Es sei M_2 die Punktmenge, für die (1), (2), (3) und

$$y \leq 1 - \frac{1}{1\,000} \qquad (6)$$

gilt.

Es ist zu beweisen, daß es ein n_1 gibt mit der Eigenschaft, daß jedes Element von M_2 auch Element der Vereinigungsmenge $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{n_1}$ ist.

Ermitteln Sie die kleinste Zahl n_1, die diese Bedingung erfüllt?