9. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1969/1970

Aufgaben

9. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 091231:

a) Es ist zu beweisen, daß die Zahl

$$z = \frac{65\,533^3 + 65\,534^3 + 65\,535^3 + 65\,536^3 + 65\,537^3 + 65\,538^3 + 65\,539^3}{32\,765 \cdot 32\,766 + 32\,767 \cdot 32\,768 + 32\,768 \cdot 32\,769 + 32\,770 \cdot 32\,771}$$

ganzrational ist!

b) Die Zahl z ist zu berechnen!

Aufgabe 091232:

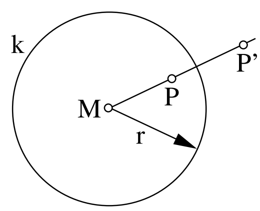
Vier Freunde, Axel, Bodo, Christian und Dieter, kauften sich ein Boot. Sie einigten sich, daß jeder von ihnen eine der ersten vier Fahrten mit dem Boot durchführen solle. Bei der Festlegung der Reihenfolge dieser Fahrten äußerten sie folgende Wünsche:

1. Für den Fall, daß Dieter als Erster fahren sollte, wollte Christian als Dritter fahren.
2. Wenn Axel oder Dieter als Zweiter fahren sollte, dann wollte Christian als Erster fahren.
3. Dann und nur dann, wenn Axel als Dritter fahren sollte, wollte Bodo als Zweiter fahren.
4. Falls Dieter als Dritter fahren sollte, so wollte Axel als Zweiter fahren.
5. Wenn Dieter als Letzter fahren sollte, dann wollten Christian als Dritter und Axel als Erster fahren.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für die Reihenfolge, in der die ersten vier Fahrten durchgeführt werden können, so daß diese Wünsche erfüllt sind!

Aufgabe 091233:

Gegeben sei in einer Ebene ε ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ein Punkt P_1 der Ebene heiße Spiegelpunkt eines Punkts P ($P \neq M$) bezüglich k, wenn P_1 auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl liegt und $\overline{MP} \cdot \overline{MP_1} = r^2$ ist.



Es sei k_1 ein Kreis der gleichen Ebene ε, der k orthogonal schneidet, d.h. die Tangenten der beiden Kreise in den Schnittpunkten stehen senkrecht aufeinander.

Welches ist der geometrische Ort aller Spiegelpunkte der auf k_1 gelegenen Punkte P bezüglich k?

Aufgabe 091234:

Beweisen Sie, daß das Produkt

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \ldots \cdot \frac{2\,499}{2\,500} \quad (n \text{ natürliche Zahl})$$

kleiner als 0,02 ist!

Aufgabe 091235:

Die Ebene ε eines gegebenen Dreiecks ΔABC wird in dessen Eckpunkten derart von drei Kugeln berührt, daß die Kugeln außerdem paarweise einander von außen berühren.

Ermitteln Sie die Radien der drei Kugeln in Abhängigkeit von den Seitenlängen des gegebenen Dreiecks!

Aufgabe 091236:

a) Ermitteln Sie den Wertevorrat W der für alle reellen x durch $y = \sin x + \cos x$ erklärten Funktion (d.h. alle diejenigen y, zu denen ein x mit $y = \sin x + \cos x$, x reell, existiert)!

b) Zeigen Sie, daß es eine ganzrationale Funktion $g(y)$ mit folgender Eigenschaft gibt!

   Gehört y zu W und ist x eine Zahl mit $\sin x + \cos x = y$, so ist $\sin^7 x + \cos^7 x = g(y)$.