8. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1968/1969

Aufgaben

8. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 081241:

Jeder nichtnegative periodische Dezimalbruch repräsentiert eine rationale Zahl, die auch in der Form p/q dargestellt werden kann (p und q natürliche Zahlen und teilerfremd, $p \geq 0$, $q > 0$). Nun seien a_1, a_2, a_3 und a_4 Ziffern zur Darstellung von Zahlen im dekadischen System. Dabei sei $a_1 \neq a_3$ oder $a_2 \neq a_4$.

Beweisen Sie!

Die Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= 0,\overline{a_1a_2a_3a_4} = 0,a_1a_2a_3a_4a_1a_2a_3a_4... \\ z_2 &= 0,\overline{a_4a_1a_2a_3} \\ z_3 &= 0,\overline{a_3a_4a_1a_2} \\ z_4 &= 0,\overline{a_2a_3a_4a_1} \end{aligned}$$

haben in der obigen Darstellung p/q stets gleiche Nenner.

Aufgabe 081242:

In einer Ebene ε liege ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Als "Spiegelung am Kreis k" bezeichnet man die folgende Abbildung, durch die jedem Punkt $P \neq M$ aus ε ein Punkt P' aus ε zugeordnet wird:

(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.

(2) Es ist $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = r^2$.

a) Konstruieren Sie zu einem beliebig im Innern von k gegebenen Punkt $P \neq M$ den Spiegelpunkt P'!

b) Es sei ein weiterer Kreis k_1 beliebig gegeben, jedoch so, daß M außerhalb von k_1 liegt.

Konstruieren Sie k_1', d.h. die Menge aller Spiegelpunkte P' der Punkte P von k_1!

Aufgabe 081243:

Eine Menge M von Elementen u, v, w heißt eine Halbgruppe, wenn in ihr eine Operation definiert ist, die jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus M eindeutig ein Element w aus M zuordnet (man schreibt $u \otimes v = w$) und wenn diese algebraische Operation assoziativ ist, d.h. wenn für alle Elemente u, v, w aus M gilt:

$$(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w).$$

Es sei nun c eine positive reelle Zahl, und es sei M die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen, die kleiner als c sind. Für je zwei Zahlen u, v aus M werde definiert:

$$u \otimes v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} .$$

Man untersuche

a) ob M eine Halbgruppe ist;

b) ob diese Halbgruppe regulär ist, d.h. ob aus $u \otimes v_1 = u \otimes v_2$ stets $v_1 = v_2$ und aus $v_1 \otimes u = v_2 \otimes u$ ebenfalls $v_1 = v_2$ folgt.

Aufgabe 081244:
Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| &= 3 \\ xy &= 3\,! \end{aligned}$$

Aufgabe 081245:
Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen x gilt:

$$\sin 5x = 16 \sin x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) .$$

Aufgabe 081246:
Es seien n eine positive ganze Zahl, h eine reelle Zahl und $f(x)$ ein Polynom (ganze rationale Funktion) mit reellen Koeffizienten vom Grade n, das keine reellen Nullstellen besitzt.

Man beweise, daß dann auch das Polynom

$$F(x) = f(x) + h \cdot f'(x) + h^2 \cdot f''(x) + \cdots + h^n \cdot f^{(n)}(x)$$

keine reellen Nullstellen hat!