8. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1968/1969

Aufgaben

8. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 081231:

Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\frac{2x}{a(x+a)} + \frac{1}{x-2a} = \frac{4x+6-a}{a(x+a)(x-2a)} \quad \text{erfüllen!}$$

Dabei sei a eine reelle Zahl. (Fallunterscheidung!)

Aufgabe 081232:

a) Man untersuche, ob die Zahlenfolge $a_n = \sqrt{25n^2+7n+1} - 5n$, streng monoton fallend ist.

b) Beweisen Sie, daß alle Glieder a_n dieser Folge größer als 0,7 sind.

Aufgabe 081233:

Es sei P_1P_2 eine Strecke in einer Ebene ε und g die Gerade, die diese Strecke enthält.

a) Von einem Punkt Q auf g, der nicht auf P_1P_2 liegt, werden an alle die Kreise in ε, die P_1P_2 als Sehne besitzen, die Tangenten gelegt.

   Beweisen Sie! Die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen auf einem Kreis um Q.

b) Es seien Q_1 und Q_2 zwei verschiedene Punkte auf g, die nicht auf der Strecke P_1P_2 liegen.

   Beweisen Sie! Die beiden Kreise um Q_1 und Q_2, die für diese Punkte die Bedingung des Aufgabenteiles a) erfüllen, haben keinen Punkt gemeinsam.

Aufgabe 081234:

Durch die Verbesserung der Lebensbedingungen und des Gesundheitsschutzes konnte in der DDR die Tuberkulose mit großem Erfolg bekämpft werden. Während im Jahre 1950 noch 92 760 Erkrankungen an aktiver Tuberkulose auftraten, ging diese Zahl in den folgenden 16 Jahren auf 13 777 im Jahre 1966 zurück.

a) Um wieviel Prozent nahm jährlich die Anzahl der Erkrankungen ab, wenn man eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt (was, abgesehen von geringen Schwankungen, der Wirklichkeit entspricht)?

b) Wieviel Jahre betrug in dem Zeitraum 1950 bis 1966 die sogenannte Halbwertzeit, d.h. diejenige Zeit, in der die Anzahl der Fälle auf die Hälfte gesenkt wurde (Angabe in Jahren mit einer Stelle nach dem Komma)?

c) Mit wieviel Erkrankungsfällen ist im Jahre 1970 zu rechnen, wenn man weiter eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt?

Aufgabe 081235:

Gegeben seien eine dreiseitige Pyramide und die ihr umbeschriebene Kugel. Über diese Pyramide und diese Kugel werden die folgenden Aussagen gemacht:

(1) Eine Grundkante der Pyramide ist ebenso lang wie der Durchmesser der Kugel.

(2) Die Längen der beiden anderen Grundkanten verhalten sich wie 3 : 4.

(3) Das Volumen der Pyramide beträgt 40 cm^3.

(4) Alle Kanten der Pyramide sind einander paarweise gleich lang.

(5) Die Grundfläche der Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck.

(6) Die Höhe der Pyramide ist ebenso lang wie der Radius der Kugel.

Es sei bekannt, daß von den obigen sechs Aussagen eine Aussage falsch und die übrigen Aussagen wahr sind.

Wie lang sind die Kanten der Pyramide?

Aufgabe 081236:

Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a\,(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

mindestens eine reelle Lösung hat. Ferner sind sämtliche Lösungen für $a = \frac{5}{6}$ anzugeben.