7. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1967/1968

Aufgaben

7. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 071241:

Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$x_1 + ax_2 + x_3 = b \tag{1}$$
$$x_2 + ax_3 + x_4 = b \tag{2}$$
$$x_3 + ax_4 + x_1 = b \tag{3}$$
$$x_4 + ax_1 + x_2 = b \tag{4}$$

Dabei sind a und b reelle Zahlen (Fallunterscheidung!).

Aufgabe 071242:

Welche von allen Ebenen, die eine und dieselbe Körperdiagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a enthalten, schneiden aus den Würfel eine Schnittfigur kleinsten Flächeninhaltes heraus?

Berechnen Sie den Flächeninhalt solch einer Schnittfigur!

Aufgabe 071243:

Geben Sie alle Funktionen $y = f(x)$ an, die jeweils in größtmöglichem Definitionsbereich (innerhalb des Bereichs der reellen Zahlen) der Gleichung

$$a \cdot f(x^n) + f(-x^n) = bx$$

genügen, wobei b eine beliebige reelle Zahl, n eine beliebige ungerade natürliche Zahl und a eine reelle Zahl mit $|a| \neq 1$ ist!

Aufgabe 071244:

Sechzehn im Dezimalsystem geschriebene natürliche Zahlen mögen eine geometrische Folge bilden, von der die ersten fünf Glieder neunstellig, fünf weitere Glieder zehstellig, vier Glieder elfstellig und zwei Glieder zwölfstellig sind.

Man beweise, daß es genau eine Folge mit diesen Eigenschaften gibt.

Aufgabe 071245:

Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ die Ungleichung

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0 \text{ erfüllt ist.}$$

Aufgabe 071246:

Es ist folgender Satz zu beweisen:

Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn mindestens zwei seiner Winkelhalbierenden gleich lang sind.